מכללת אורט כפר-סבא

<u>מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים</u>

<u>תרגיל מס' 24</u>

פתרו את השאלות הבאות. יש לסיים את התרגיל עד יום א' (1.3).

<u>שאלה 1</u>

הכרנו מספר אלגוריתמים הפותרים את בעיית המסלול הקצר ביותר: סריקה לרוחב (BFS), דייקסטרה (Dijkstra), מסלולים קצרים ביותר בגמ"ל (DAG-Shortest-Paths), בלמן-פורד (Bellman-Ford). עבור כל אחד מהגרפים הבאים, קבע איזה מן האלגוריתמים הנ"ל הוא המתאים לו ביותר:

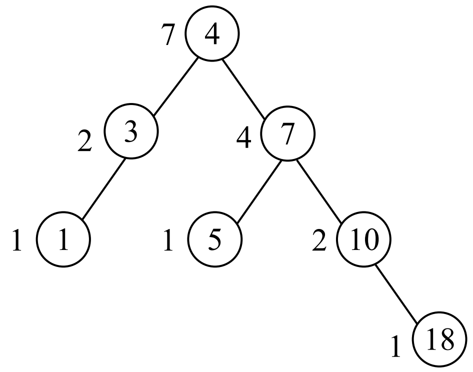
א. גרף מכוון וממושקל עם משקלים שליליים על הקשתות (אך ללא מעגל שלילי).

ב. גרף לא ממושקל.

ג. גרף מכוון וממושקל שאין בו מעגלים.

<u>שאלה 2</u>

מממשים עץ חיפוש בינארי **מאוזן**, כך שכל אחד מהקודקודים מכיל שדה בשם size, השומר את מספר הצמתים בתת-העץ שקודקוד זה הוא שורשו. לדוגמא, נתון עץ החיפוש הבינארי המאוזן הבא, והמספר שכתוב לצד כל קודקוד הוא ערך שדה ה-size שלו:



א. נניח שנתון עץ חיפוש בינארי מאוזן, אשר בכל אחד מקודקודיו קיים שדה size, אולם ערכו טרם נקבע. תארו פונקציה רקורסיבית המקבלת מצביע לשורש העץ הזה, וממלאת את ערכי ה-size עבור כל אחד מקודקודיו.

ב. תארו כיצד ניתן להשתמש במבנה הנתונים המתואר בשאלה זו, על מנת לבצע פעולת סדר סטטיסטי על קבוצת נתונים (כלומר: על מנת לבצע פעולת Select, אשר מקבלת מספר k, ומחזירה את איבר המיקום ה-k בקבוצת הנתונים).

<u>שאלה 3</u>

נתון גרף פשוט, קשיר, **לא ממושקל ולא מכוון** $G = (V,E)$, ונתונים זוג קודקודים $s,t \in V$. הגרף מיוצג בזיכרון המחשב על-ידי רשימת סמיכות (שכנות). לפניך אלגוריתם **יעיל** אשר מחשב את אורך המסלול **הזוגי** הקצר ביותר מ-s ל-t.

האלגוריתם:

צעד 1: נבנה גרף חדש $G' = (V',E')$, כאשר:

$$V' = \{v_1, v_2 \mid v \in V\}$$

$$E' = \{(u_1, v_2), (u_2, v_1) \mid (u, v) \in E\}$$

כלומר, עבור כל קודקוד v בקבוצת הקודקודים V של הגרף המקורי G, ניצור בגרף החדש 'G שני קודקודים, שיסומנו v_1 ו-v_2. ועבור כל קשת המחברת בין הקודקוד u לקודקוד v בקבוצת הקשתות E של הגרף המקורי G, ניצור בגרף החדש 'G שתי קשתות – אחת שמחברת בין u_1 ו-v_2, ואחת שמחברת בין u_2 ו-v_1.

צעד 2: נריץ את אלגוריתם ____(1)____ על 'G החל מהצומת ____(2)____ .

צעד 3: נחזיר את אורך המסלול שהאלגוריתם מצא, המסתיים בצומת t2 .

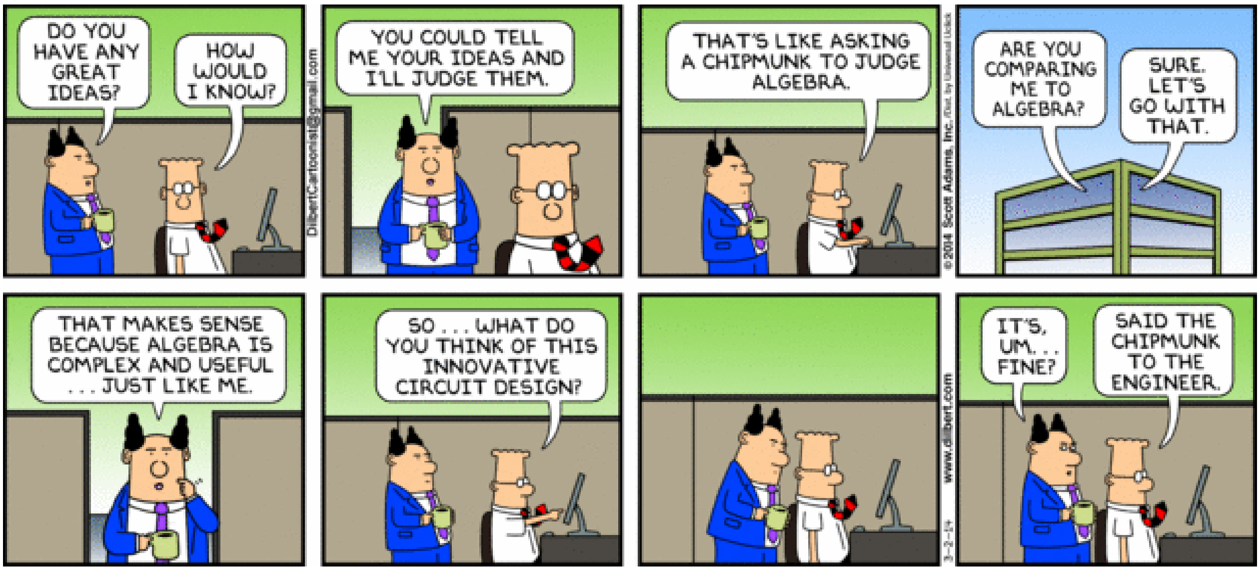
באלגוריתם הנתון חסרים שני ביטויים המסומנים בספרות (1)-(2). התשובה הנכונה בעבור כל אחד מהביטויים החסרים מופיעה בסעיפים שלהלן:

א. התשובה הנכונה עבור ביטוי (1) לעיל היא:
1. סריקה לרוחב (BFS)
2. פרים (Prim)
3. דייקסטרה (Dijkstra)
4. DAG-SHORTEST-PATHS

ב. התשובה הנכונה עבור ביטוי (2) לעיל היא:
1. s_1
2. s_2
3. t_1
4. t_2

ג. סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנתון היא:

1. $\Theta(|V| \cdot \log |V|)$
2. $\Theta(|E| \cdot \log |V|)$
3. $\Theta(|V| \cdot |E|)$
4. $\Theta(|V| + |E|)$

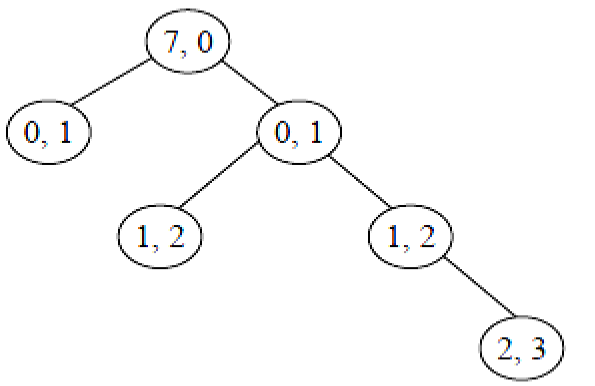


<u>שאלה 4 (ממבחן של משרד החינוך)</u>

מגדירים אלגוריתם הנקרא **רמה-בבנים(T)** המקבל עץ בינארי T. בכל צומת בעץ שני ערכים – האחד הוא מספר שלם שהוא ערך הצומת, והאחר מציין את רמת הצומת.

האלגוריתם מחזיר 'אמת' אם לכל צומת בעץ, פרט לשורש העץ, מתקיים שערך הצומת הוא הרמה של אביו. אחרת – האלגוריתם מחזיר 'שקר'.

לדוגמא, עבור העץ T הבא יוחזר 'אמת':



כתבו אלגוריתם מילולי המבצע את **רמה-בבנים(T).**

<u>שאלה 5</u>

נתון גרף פשוט, ללא מעגלים, קשיר ומכוון $G = (V,E)$, עם משקלות אי-שליליים על הקשתות, ונתונים זוג קודקודים $s,t \in V$ וקשת $e \in E$. הגרף מיוצג בזיכרון המחשב על-ידי רשימת סמיכות (שכנות).

כזכור, מגדירים **משקל של מסלול** בתור סכום המשקלות על הקשתות המהוות את המסלול. מסלול מסוים בין s ל-t ייקרא **מסלול קל ביותר**, אם לא קיים מסלול בין s ל-t שמשקלו קטן יותר ממשקל מסלול זה. בין שני קודקודים יכולים להיות מספר מסלולים קלים ביותר.

לפניך אלגוריתם **יעיל** אשר בודק האם הקשת e נמצאת על **כל** המסלולים הקלים ביותר מ-s ל-t.

האלגוריתם:

צעד 1: נריץ את אלגוריתם ___(1)___ על הגרף G החל מצומת s, ונשמור במשתנה x את ___(2)___.

צעד 2: ניצור גרף חדש $G' = ($___(3)___$)$, כלומר גרף שקבוצת קודקודיו זהה לזו של הגרף G, וקבוצת קשתותיו זהה לזו של G, פרט לקשת e שאינה כלולה בו.

צעד 3: נריץ את אלגוריתם ___(1)___ על הגרף 'G החל מצומת s, ונשמור במשתנה y את ___(2)___.

צעד 4: אם ___(4)___ אזי הצג כפלט: "ישנו מסלול קל ביותר בין s ל-t שאינו כולל את e". אחרת – הצג כפלט: "כל מסלול קל ביותר בין s ל-t כולל את e".

באלגוריתם הנתון חסרים ארבעה ביטויים המסומנים בספרות (1)-(4). התשובה הנכונה בעבור כל אחד מהביטויים החסרים מופיעה בסעיפים שלהלן:

א. מהי התשובה הנכונה בעבור ביטוי (1) לעיל?
1. דייקסטרה (Dijkstra)
2. סריקה לרוחב (BFS)
3. פרים (Prim)
4. מסלולים קצרים ביותר בגמ"ל (DAG-SHORTEST-PATHS)

ב.   מהי התשובה הנכונה בעבור ביטוי (2) לעיל?

1. משקל הקשת הקלה ביותר המחברת את הקודקוד s עם הקודקוד t.
2. משקל העץ המינימלי מבין העצים הפורשים ש-s הוא שורשם, ו-t הוא אחד מהעלים.
3. המשקל המינימלי של קשת המחברת בין הרק״ח של s לרק״ח של t.
4. משקל המסלול הקל ביותר המוביל מקודקוד s לקודקוד t.

ג.   מהי התשובה הנכונה בעבור ביטוי (3) לעיל?

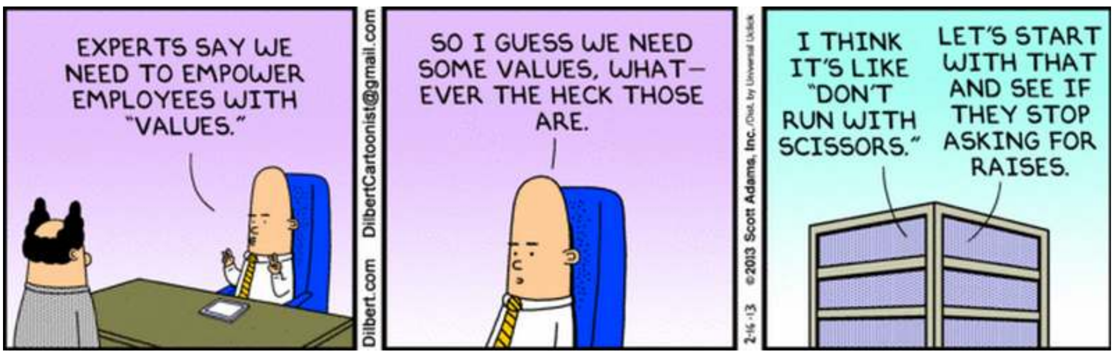
1. $V , E \cup \{e\}$
2. $V - \{e\} , E - \{e\}$
3. V , E
4. $V , E - \{e\}$

ד.   מהי התשובה הנכונה בעבור ביטוי (4) לעיל?

1. $x = y$
2. $|x-y| = w(e)$ (ההפרש בין x ל-y, בערכו המוחלט, שווה למשקל הקשת e)
3. $x < y$
4. $x > y$

ה.   מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שלעיל?

1. $\Theta(|V|^3)$
2. $\Theta(|E| \cdot \log |V|)$
3. $\Theta(|V|^2)$
4. $\Theta(|V| + |E|)$



שאלה 6

יהי $G = (V,E)$ גרף ממושקל עם פונקציית משקל $w : E \to \{0,1,2,...K-1\}$, כאשר K הוא קבוע שלם אי-שלילי כלשהו. תארו כיצד ניתן לשנות את המימוש של תור קדימויות, כך שאלגוריתם דייקסטרה ירוץ בזמן ריצה של $\Theta(K\cdot|V|+|E|)$, במקום בזמן ריצה $\Theta(|E|\cdot\log(|V|))$.

הדרכה: במקום לממש את תור הקדימויות באמצעות ערימת מינימום, ממשו אותם באמצעות מערך, שבו התא עם האינדקס i יחזיק רשימה מקושרת של צמתים ששדה ה-distance שלהם מכיל כרגע את הערך i. התא האחרון במערך יאחסן רשימה מקושרת של כל הצמתים ששדה ה-distance שלהם מכיל כרגע את הערך ∞ (אינסוף).

חשבו: מה צריך להיות גודלו של המערך? איך נממש את הפעולה של שליפת איבר בעל distance מינימאלי מתור הקדימויות (שורה 8 באלגוריתם של דייקסטרה)? מה נעשה כאשר מעדכנים את ערך ה-distance של איבר הנמצא כרגע בתור הקדימויות (שורה 12)?

שאלה 7 (ממבחן של משרד החינוך)

מהי הטענה **שאיננה** נכונה?

א. בגרף מכוון וקשיר $G=(V,E)$ קיים מעגל אוילר אם ורק אם $\forall v\in V\ d_{in}(v) = d_{out}(v)$.

ב. בגרף מכוון וקשיר $G=(V,E)$ קיים מסלול אוילר אם ורק אם קיימים $u,w\in V$ כך ש: $d_{out}(u) = d_{in}(u) + 1$, $d_{in}(w) = d_{out}(w) + 1$, ולכל קודקוד v אחר $d_{in}(v) = d_{out}(v)$.

ג. בגרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ קיים מעגל אוילר אם ורק אם $\forall v\in V\ d_{in}(v) = d_{out}(v)$.

ד. בגרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ קיים מעגל אוילר אם ורק אם דרגתו של כל קודקוד בגרף היא כפולה של 2.

תזכורת: הסימן המתמטי $\forall$ פירושו "**לכל**" (for all).

<u>שאלה 8 (ממבחן של משרד החינוך)</u>

הגרף G הוא גרף קשיר ולא מכוון המוגדר על ידי $G = (V, E)$.

V היא קבוצת הקדקודים, ו- E היא קבוצת הקשתות.

פונקציית המשקל $W: E \rightarrow R^+$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G .

יהיו s ו- t קדקודים בגרף G , ו- U תת-קבוצה של V .

לפניך תיאור אלגוריתם המוצא מסלול מ- s ל- t בגרף G, המבקר במספר מינימלי של קדקודים ב- U .

באלגוריתם חסרים ארבעה ביטויים המסומנים (1) - (4) .

תיאור האלגוריתם:

צעד 1: נבנה את הגרף $G_1 = (V_1, E_1)$ כאשר:

$V_1 \leftarrow V$

$E_1 \leftarrow E$

ופונקציית המשקל $W: E_1 \rightarrow \{0, 1, 2\}$, המוגדרת באופן הזה:

$W(x, y) =$ ___(1)___ כאשר הקדקודים x ו- y לא שייכים לקבוצה U .

$W(x, y) =$ ___(2)___ כאשר רק אחד הקדקודים x או y שייך לקבוצה U.

$W(x, y) =$ ___(3)___ כאשר הקדקודים x ו- y שייכים לקבוצה U .

צעד 2: נפעיל את אלגוריתם ___(4)___ על הגרף G_1 החל מקדקוד s .

צעד 3: התקבל המסלול המבוקש ואפשר לשחזר אותו מתוך מערך ה- parent שנבנה באלגוריתם החל מ- s .

העתק למחברתך את הטבלה שלפניך, ורשום בה את הביטויים החסרים.

ביטוי (1)	
ביטוי (2)	
ביטוי (3)	
ביטוי (4)	

נקודה למחשבה: מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם? היעזרו לשם כך בתשובתכם לשאלה 6 בתרגיל זה.

<u>שאלה 9 (ממבחן של משרד החינוך)</u>

נתון האלגוריתם שלפניך:

חידה_1(T)

{האלגוריתם מקבל עץ בינרי T ומחזיר מספר טבעי}

(1) אם עץ_ריק(T) אזי החזר (0)

(2) אחרת בצע

(2.1) **חידה_1**(בן_שמאלי(T)) ← x

(2.2) **חידה_1**(בן_ימני(T)) ← y

(2.3) אם (לא עץ_ריק(בן_שמאלי(T)) וגם לא עץ_ריק(בן_ימני(T)))

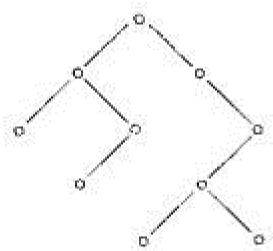
או (עץ_ריק(בן_שמאלי(T)) וגם עץ_ריק(בן_ימני(T))) אזי

z ← 0

(2.4) אחרת z ← 1

(2.5) החזר (x+y+z)

א. מה יחזיר האלגוריתם **חידה_1** אם יקבל את העץ T הבא?



ב. הסבר באופן כללי מה מבצע האלגוריתם.

ג. לפניך אלגוריתם:

חידה_2(T)

{האלגוריתם מקבל עץ בינרי T ומחזיר מספר טבעי}

(1) z ← 0

(2) אם עץ_ריק(T) אזי החזר (0)

(3) אחרת בצע

(3.1) אם בן_שמאלי(T) ≠ בן_ימני(T) אזי z ← 1

(3.2) **חידה_2**(בן_שמאלי(T)) ← x

(3.3) **חידה_2**(בן_ימני(T)) ← y

(3.4) החזר (x+y+z)

טענה: לכל עץ T **חידה_1**(T) = **חידה_2**(T), כלומר אם שני האלגוריתמים מקבלים אותו עץ T, הם יחזירו אותו ערך.

האם הטענה נכונה? נמק.