



מכללת אורט כפר-סבא

מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים

תרגיל מס' 20

פתרו את השאלות הבאות. יש לסיים את התרגיל עד יום ד' (18.2).

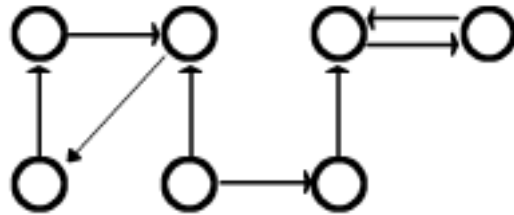
שאלה 1

- א. פתרו את שאלה 5 מהבחינה החיצונית של שנת תשס"ג (2003).
- ב. מדוע באלגוריתם המרה מדובר רק על קשתות עץ (tree edges) וקשתות אחורה (back edges), ולא על קשתות חוצות (cross edges) וקשתות קדימה (forward edges)?
- ג. הסבירו מדוע סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם המתואר בסעיף ג' היא $\Theta(|V| + |E|)$.

שאלה 2

נתון הגרף המכוון $G = (V, E)$ הבא:

- א. מצא את רכיבי הקשירות בחוזקה (רק"חיים) של הגרף, באמצעות האלגוריתם שנלמד בכיתה.
- ב. לאחר חישוב הרק"חיים, תארו את גרף הרכיבים $G^{SCC} = (V^{SCC}, E^{SCC})$. גרף כזה מכונה גם 'גרף העל'.



(תשובה: http://math.eitan.ac.il/graph_theory/040_Strong/040_Strong_intro.htm)

שאלה 3

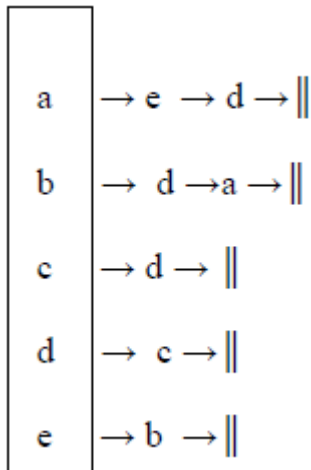
בתוך מבנה נתונים מסוים מאוחסנים n איברים ולהם מפתחות שונים (כל מפתח הוא מספר שלם וחיובי), ומעוניינים לממש את הפעולה $Select(k)$, אשר מחזירה את האיבר בעל המפתח ה- k -י בגודלו (לדוגמא: הפעולה $Select(1)$ תחזיר את האיבר בעל המפתח הקטן ביותר, $Select(n)$ תחזיר את האיבר בעל המפתח הגדול ביותר, וכו').

עבור כל אחד ממבני הנתונים הבאים, הסבירו בקצרה כיצד ניתן לממש את הפעולה ביעילות, ונתחו את סיבוכיות זמן הריצה של הפעולה $Select$ לפי n (מספר האיברים במבנה) ו- k (הפרמטר של הפעולה $Select$).

- א. מערך ממוין
- ב. רשימה מקושרת ממוינת
- ג. ערימת מינימום
- ד. טבלת עירבול (Hash Table)

שאלה 4

נתון גרף מכונן $G = (V, E)$ המיוצג על-ידי רשימת הסמיכויות הבאה:



א. שרטט את הגרף.

ב. הפעל את האלגוריתם **חיפוש לעומק (DFS)** על הגרף הנתון, החל מהקודקוד a. בהפעלת האלגוריתם חשב את $d[u]$ ואת $f[u]$, בעבור כל קודקוד u, כאשר $d[u]$ מציין את מועד הגילוי של הקודקוד u בעת הסריקה, ו- $f[u]$ מציין את מועד סיום הטיפול בקודקוד u.

כעת שרטט את **עץ העומק (עץ DFS)** שמתקבל לאחר הרצת האלגוריתם, ומלא את הטבלה הבאה:

קודקוד u	a	b	c	d	e
$d[u]$					
$f[u]$					

ג. יהי $G^T = (V, E^T)$ הגרף המוחלף של הגרף המכוון G הנתון לעיל. שים לב כי קשת מכוונת (a, b) בגרף G, הופכת להיות קשת מכוונת (b, a) בגרף G^T . שרטט את הגרף G^T .

ד. הפעל את האלגוריתם **חיפוש לעומק (DFS)** על הגרף G^T , כאשר הלולאה הראשית סורקת את קודקודי הגרף בסדר הבא: הסדר נקבע לפי מועדי הסיום ($f[u]$) בסדר יורד, כאשר מועדי הסיום ($f[u]$) חושבו בסעיף ב' עבור הגרף G. כלומר, בהתחלה האלגוריתם מופעל על הגרף G^T החל מהקודקוד בעל מועד הסיום הגדול ביותר, שחושב על-ידי DFS עבור הגרף G בסעיף ב'.

שרטט את **יער העומק (יער DFS)** המתקבל לאחר הפעלת האלגוריתם על הגרף G^T . כזכור, יער עומק הוא אוסף של עצי עומק.

ה. כמה רכיבי קשירות בחוזקה (רק"ח) - Strongly Connected Components (SCC) יש בגרף המוחלף G^T ?

ו. הסק: האם ל-G ול- G^T יש בדיוק אותם רכיבי קשירות חזקה? מהו הקשר בין יער העומק שנבנה בסעיף ד', לבין רכיבי קשירות בחוזקה של הגרף G?

שאלה 5 (ממבחן של משרד החינוך)

$G = (V, E)$ הוא גרף מכוון, כאשר V היא קבוצת הקדקודים בגרף ו- E היא קבוצת הקשתות בגרף. G מיוצג על ידי רשימת סמיכויות. לפיכך תיאור של אלגוריתם אשר בודק אם בגרף G יש מעגל, ומדפיס הודעה מתאימה. באלגוריתם חסרים שני ביטויים המסומנים (1) ו-(2).

תיאור האלגוריתם

- צעד 1: הפעל את האלגוריתם למציאת רכיבי קשירות חזקה (SCC) על הגרף G .
(האלגוריתם מניב את הרק"חים הקיימים בגרף.)
- צעד 2: אם (1) _____, אז _____, הפלט הוא: בגרף G אין מעגל.
- צעד 3: אחרת הפלט הוא: בגרף G יש מעגל.

לפיכך שלוש אפשרויות להשלמת ביטוי (1) ושלוש אפשרויות להשלמת ביטוי (2).
האפשרויות:

(1) הוא אחד מאלה:

- אין רק"ח המכיל
- רק"ח אחד לפחות מכיל
- כל אחד מהרק"חים מכיל

(2) הוא אחד מאלה:

- קדקוד אחד בלבד
- שני קדקודים לפחות
- את כל קדקודי הגרף

בחר באחת מהאפשרויות להשלמת ביטוי (1) ובאחת מהאפשרויות להשלמת ביטוי (2), כך שהאלגוריתם יבצע את הנדרש.



שאלה 6 (ממבחן של משרד החינוך)

יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון המיוצג על ידי רשימת סמיכויות. לפניך תיאור חלקי של אלגוריתם בעברית מבנית אשר בודק אם בגרף הנתון יש מעגל. הערה - הפלט היחיד של האלגוריתם הוא : קיים מעגל או לא קיים מעגל.

תיאור האלגוריתם

1. הפעל את אלגוריתם (1) על הגרף G .
2. אם במהלך ביצועו האלגוריתם נתקל בקשת (u, v) (2) , אזי האלגוריתם נעצר ומודיע שבגרף G קיים מעגל.
3. אחרת, האלגוריתם ממשיך עד לסיום משימתו המקורית, ומודיע שבגרף G אין מעגל.

באלגוריתם הושמטו שני ביטויים המסומנים במספרים בין סוגריים עגולים. התשובה הנכונה עבור כל אחד מהביטויים החסרים מופיעים בסעיפים ב' ו-ג' :

ב. התשובה הנכונה עבור ביטוי (1) לעיל היא :

(1) . מציאת המסלול הקצר ביותר

(2) . BFS

(3) . DFS

(4) . למצוא את הרק"חים.

ג. התשובה הנכונה עבור ביטוי (2) לעיל היא :

(1) בעלת משקל מינימלי

(2) שנבדקת לראשונה ו- v צבוע באפור

(3) שנבדקת לראשונה ו- v צבוע בלבן

(4) שנבדקת לראשונה ו- v צבוע בשחור

ד.

סבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנתון הינה :

(1) ליניארית כפונקציה של גודל הקלט.

(2) ריבועית כפונקציה של גודל הקלט.

(3) לוגריתמית כפונקציה של גודל הקלט.

(4) אף אחת מבין התשובות הנתונות איננה נכונה.

שאלה 7

בשאלה 9 בתרגיל 16 ראינו כיצד ניתן לכתוב אלגוריתם שזמן ריצתו $\Theta(n)$ המקבל שני עצי AVL המכילים n איברים כל-אחד, ובונה עץ AVL המכיל את איברי שני העצים.

א. האם ניתן לבנות אלגוריתם שזמן ריצתו $\Theta(n)$, המקבל 3 עצי AVL, שבכל אחד מהם יש n איברים, ובונה עץ AVL המכיל את איברי כל העצים? אם כן – תארו את האלגוריתם, ואם לא – הסבירו מדוע אלגוריתם כזה לא ייתכן.

ב. האם ניתן לבנות אלגוריתם שזמן ריצתו $\Theta(n)$, המקבל k עצי AVL (כאשר k הוא מספר טבעי וקבוע, אשר אינו תלוי ב- n), שבכל אחד מהם יש n איברים, ובונה עץ AVL המכיל את איברי כל העצים? אם כן – תארו את האלגוריתם, ואם לא – הסבירו מדוע אלגוריתם כזה לא ייתכן.

ג. האם ניתן לבנות אלגוריתם שזמן ריצתו $\Theta(n)$, המקבל n עצי AVL, שבכל אחד מהם יש n איברים, ובונה עץ AVL המכיל את איברי כל העצים? אם כן – תארו את האלגוריתם, ואם לא – הסבירו מדוע אלגוריתם כזה לא ייתכן.



שאלה 8

פתרו את נוסחאות הנסיגה הלינאריות האי-הומוגניות הבאות, עם תנאי התחלה כרצונכם, בעזרת שיטת ההפרשים:

א. $f(n) = f(n-1) + n$

ב. $f(n) = 2f(n-1) + n - 4$

ג. $f(n) = 2f(n-1) + 3f(n-2) + 3^n$

שאלה 9

א. מספר האיברים המקסימלי בעץ בינארי כמעט שלם שגובהו h הוא...

1. $\log_2(h)$

2. $2^{h-1}+1$

3. 2^h

4. $2^{h+1}-1$

ב. האם תשובתכם לסעיף א' הייתה משתנה אם היינו משמיטים את הדרישה שהעץ הבינארי יהיה כמעט שלם? נמקו את תשובתכם.

ג. מספר האיברים המינימלי בעץ בינארי כמעט שלם שגובהו h הוא...

1. $\log_2(h-1)+1$

2. $2^{h-2}+1$

3. 2^h-1

4. 2^h

ד. האם תשובתכם לסעיף ג' הייתה משתנה אם היינו משמיטים את הדרישה שהעץ הבינארי יהיה כמעט שלם? נמקו את תשובתכם.

ה. הגובה (height) של ערימה בינארית (binary heap) בת n איברים הוא...

1. $\lfloor \log_2(n-1) \rfloor + 1$

2. $\lfloor \log_2(n) \rfloor$

3. $\lceil \log_2(n) \rceil - 1$

4. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

