



מכללת אורט כפר-סבא

**מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים**

**תרגיל מס' 20**

פתרו את השאלות הבאות. יש לסיים את התרגיל עד יום ב' (16.2).

**שאלה 1**

מעוניינים לאחסן רשומות בטבלת גיבוב (hash table), כאשר הפונקציה הממירה את המפתח לכתובת היא פונקציה המחזירה את שארית החלוקה של המפתח ב-10, כלומר:  $h(k) = k \% 10$ .  
לפניכם רשימת מפתחות של רשומות שיש להכניס למבנה הנתונים (יש לקרוא את הרשימה משמאל לימין): 14, 18, 20, 3, 60, 33, 42, 76. הטיפול בהתנגשויות נעשה **בשיטת המרחב הפתוח** (open addressing) **בהתקדמות רציפה** (linear probing).

מלאו את הטבלה הבאה, ורשמו בה את המפתחות לפי סדר הכנסתם.

אינדקס	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
מפתח										

**שאלה 2**

כאשר משתמשים בטבלת גיבוב, אחת הדרכים לממש את **שיטת השרשור** (chaining) לטיפול בהתנגשויות, היא לא על-ידי רשימות מקושרות דו-כיווניות, אלא על-ידי עצי חיפוש בינארי מאוזנים (למשל: עצי AVL). כלומר, כל אחד מהתאים בטבלה מכיל מצביע לראש עץ חיפוש בינארי מאוזן, אליו נכנסות כל הרשומות שפונקציית הגיבוב מתאימה להן את התא הזה.

מלאו את הטבלה הבאה, כך שתכיל את סיבוכיות זמן הריצה (במונחים של  $\Theta$ ), של כל פעולות המילון, הן במקרה הגרוע והן במקרה הממוצע. הניחו כי גודל הטבלה  $m$  נקבע להיות פרופורציוני למספר הרשומות  $n$ , כלומר כי  $m = \Theta(n)$ .

טיפול בהתנגשויות על-ידי עצי חיפוש בינארי מאוזנים		טיפול בהתנגשויות על-ידי רשימות מקושרות דו-כיווניות		
במקרה הממוצע	במקרה הגרוע	במקרה הממוצע	במקרה הגרוע	
				הכנסה
				מחיקה
				חיפוש

### שאלה 3

לפניכם טענה: "כאשר מאחסנים רשומות בטבלת גיבוב (hash table), אפשר להדפיס במהירות וביעילות את כל הרשומות, כשהן ממוינות לפי המפתח הראשי".  
האם הטענה נכונה או לא נכונה? נמקו את תשובתכם.

### שאלה 4

תרגמו את הביטויים הבאים המופיעים בכתובי תחילי (prefix) לביטויים הכתובים בכתובי תוכי (infix) ולביטויים הכתובים בכתובי סופי (postfix):

א.  $+ * A B / C D$

ב.  $/ * A + B C D$

ג.  $* A + B / C D$

### שאלה 5

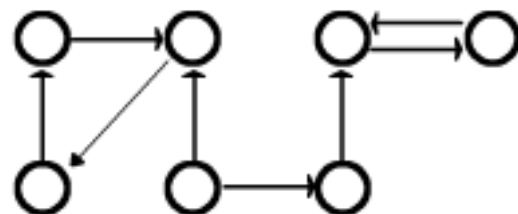
כתבו תכנית מחשב בשפת C אשר קולטת מחרוזת המייצגת ביטוי תחילי (prefix) ומציגה אותו כפלט בתור ביטוי סופי (postfix). היעזרו בסעיף ח' של שאלה 2 מהבחינה החיצונית של 2004.  
עקבו אחרי ריצת התכנית עבור אחת הדוגמאות מהשאלה הקודמת (עקבו ידנית באמצעות טבלה מעקב, או באמצעות אפשרות ה-debug של סביבת העבודה).

### שאלה 6

- פתרו את שאלה 5 מהבחינה החיצונית של שנת תשס"ג (2003).
- מדוע באלגוריתם המרה מדובר רק על קשתות עץ (tree edges) וקשתות אחורה (back edges), ולא על קשתות חוצות (cross edges) וקשתות קדימה (forward edges)?
- הסבירו מדוע סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם המתואר בסעיף ג' היא  $\Theta(|V| + |E|)$ .

### שאלה 7

נתון הגרף המכוון  $G = (V, E)$  הבא:



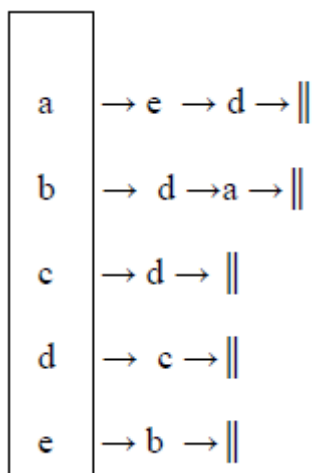
- מצא את רכיבי הקשירות בחוזקה (רק"חים) של הגרף, באמצעות האלגוריתם שנלמד בכיתה.
- לאחר חישוב הרק"חים, תארו את גרף הרכיבים  $G^{SCC} = (V^{SCC}, E^{SCC})$ . גרף כזה מכונה גם 'גרף העל'.

בתשובה לשאלה זו תוכלו למצוא בכתובת:

[http://math.eitan.ac.il/graph\\_theory/040\\_Strong/040\\_Strong\\_intro.htm](http://math.eitan.ac.il/graph_theory/040_Strong/040_Strong_intro.htm)

## שאלה 8

נתון גרף מכונן  $G = (V, E)$  המיוצג על-ידי רשימת הסמיכויות הבאה:



א. שרטט את הגרף.

ב. הפעל את האלגוריתם **חיפוש לעומק (DFS)** על הגרף הנתון, החל מהקודקוד a. בהפעלת האלגוריתם חשב את  $d[u]$  ואת  $f[u]$ , בעבור כל קודקוד u, כאשר  $d[u]$  מציין את מועד הגילוי של הקודקוד u בעת הסריקה, ו- $f[u]$  מציין את מועד סיום הטיפול בקודקוד u.

כעת שרטט את **עץ העומק (עץ DFS)** שמתקבל לאחר הרצת האלגוריתם, ומלא את הטבלה הבאה:

קודקוד u	a	b	c	d	e
$d[u]$					
$f[u]$					

ג. יהי  $G^T = (V, E^T)$  הגרף המוחלף של הגרף המכונן G הנתון לעיל. שים לב כי קשת מכוונת  $(a, b)$  בגרף G, הופכת להיות קשת מכוונת  $(b, a)$  בגרף  $G^T$ . שרטט את הגרף  $G^T$ .

ד. הפעל את האלגוריתם **חיפוש לעומק (DFS)** על הגרף  $G^T$ , כאשר הלולאה הראשית סורקת את קודקודי הגרף בסדר הבא: הסדר נקבע לפי מועדי הסיום ( $f[u]$ ) בסדר יורד, כאשר מועדי הסיום ( $f[u]$ ) חושבו בסעיף ב' עבור הגרף G. כלומר, בהתחלה האלגוריתם מופעל על הגרף  $G^T$  החל מהקודקוד בעל מועד הסיום הגדול ביותר, שחושב על-ידי DFS עבור הגרף G בסעיף ב'.

שרטט את **יער העומק (יער DFS)** המתקבל לאחר הפעלת האלגוריתם על הגרף  $G^T$ . כזכור, יער עומק הוא אוסף של עצי עומק.

ה. כמה רכיבי קשירות בחוזקה (רק"ח) - Strongly Connected Components (SCC) יש בגרף המוחלף  $G^T$ ?

ו. הסק: האם ל-G ול- $G^T$  יש בדיוק אותם רכיבי קשירות חזקה? מהו הקשר בין יער העומק שנבנה בסעיף ד', לבין רכיבי קשירות בחוזקה של הגרף G?

## שאלה 9 (מבחן של משרד החינוך)

$G = (V, E)$  הוא גרף מכוון, כאשר  $V$  היא קבוצת הקדקודים בגרף ו- $E$  היא קבוצת הקשתות בגרף.  $G$  מיוצג על ידי רשימת סמיכויות. לפיכך תיאור של אלגוריתם אשר בודק אם בגרף  $G$  יש מעגל, ומדפיס הודעה מתאימה. באלגוריתם חסרים שני ביטויים המסומנים (1) ו-(2).

### **תיאור האלגוריתם**

צעד 1: הפעל את האלגוריתם למציאת רכיבי קשירות חזקה (SCC) על הגרף  $G$ .

(האלגוריתם מניב את הרק"חים הקיימים בגרף.)

צעד 2: אם (1) \_\_\_\_\_, אז

הפלט הוא: בגרף  $G$  אין מעגל.

צעד 3: אחרת

הפלט הוא: בגרף  $G$  יש מעגל.

לפיכך שלוש אפשרויות להשלמת ביטוי (1) ושלוש אפשרויות להשלמת ביטוי (2).  
האפשרויות:

(1) הוא אחד מאלה:

— אין רק"ח המכיל

— רק"ח אחד לפחות מכיל

— כל אחד מהרק"חים מכיל

(2) הוא אחד מאלה:

— קדקוד אחד בלבד

— שני קדקודים לפחות

— את כל קדקודי הגרף

בחר באחת מהאפשרויות להשלמת ביטוי (1) ובאחת מהאפשרויות להשלמת ביטוי (2), כך שהאלגוריתם יבצע את הנדרש.

## שאלה 10 (ממבחן של משרד החינוך)

יהי  $G = (V, E)$  גרף לא מכוון המיוצג על ידי רשימת סמיכויות. לפניך תיאור חלקי של אלגוריתם בעברית מבנית אשר בודק אם בגרף הנתון יש מעגל. הערה - הפלט היחיד של האלגוריתם הוא : **קיים מעגל או לא קיים מעגל**.

### תיאור האלגוריתם

1. הפעל את אלגוריתם (1) על הגרף  $G$ .
2. אם במהלך ביצועו האלגוריתם נתקל בקשת  $(u, v)$  (2) , אזי האלגוריתם נעצר ומודיע שבגרף  $G$  קיים מעגל.
3. אחרת, האלגוריתם ממשיך עד לסיום משימתו המקורית, ומודיע שבגרף  $G$  אין מעגל.

באלגוריתם הושמטו שני ביטויים המסומנים במספרים בין סוגריים עגולים. התשובה הנכונה עבור כל אחד מהביטויים החסרים מופיעים בסעיפים ב' ו-ג' :

ב. התשובה הנכונה עבור ביטוי (1) לעיל היא :

- (1) מציאת המסלול הקצר ביותר
- (2) BFS
- (3) DFS
- (4) למצוא את הרק"חים.

ג. התשובה הנכונה עבור ביטוי (2) לעיל היא :

- (1) בעלת משקל מינימלי
- (2) שנבדקת לראשונה ו-  $v$  צבוע באפור
- (3) שנבדקת לראשונה ו-  $v$  צבוע בלבן
- (4) שנבדקת לראשונה ו-  $v$  צבוע בשחור

ד.

סבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנתון הינה :

- (1) ליניארית כפונקציה של גודל הקלט.
- (2) ריבועית כפונקציה של גודל הקלט.
- (3) לוגריתמית כפונקציה של גודל הקלט.
- (4) אף אחת מבין התשובות הנתונות איננה נכונה.