מכללת אורט כפר-סבא

<u>מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים</u>

<u>תרגיל מס׳ 19</u>

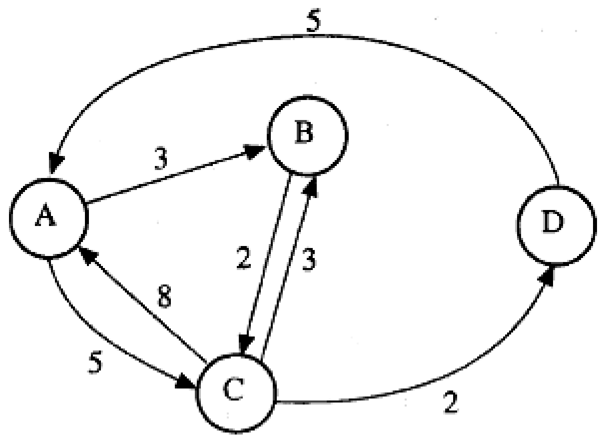
פתרו את השאלות הבאות. יש לסיים את התרגיל עד יום א׳ (15.2).

<u>שאלה 1 (ממבחן של משרד החינוך)</u>

הגרף G מוגדר על־ידי $G=(V,E)$, כאשר V מבטא קבוצת קדקודים (צמתים) בגרף, ו־E מבטא קבוצת קשתות בגרף. פונקציית המשקל $W{:}E\rightarrow R^{+}$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G .

נגדיר: **קוטר הגרף** G הינו הערך המקסימלי מבין ערכי המסלולים הקצרים ביותר בגרף.

1. נתון הגרף הזה:



העתק למחברתך את המטריצה הזאת:

P =

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

השלם את ערכי התאים של המטריצה P , כך שערך התא $P[v_i][v_j]$ במטריצה זו יהיה אורך המסלול הקצר ביותר מקדקוד v_i לקדקוד v_j , כאשר: $V=\{A, B, C, D\}$, $v_i\in V$ ו־ $v_j\in V$.

2. מצא את קוטר הגרף שבסעיף ג׳1.

3. להלן אלגוריתם מילולי, שמטרתו למצוא את הקוטר של **גרף כלשהו** $G = (V, E)$.
לצורך האלגוריתם, הנח כי הקדקודים בגרף ממוספרים ב־ $1, 2, 3, \ldots, |V|$ בסדר שרירותי.
כמו כן הנח שמוגדרת מטריצה P מסדר $|V| \times |V|$.
באלגוריתם הושמטו חמישה ביטויים המסומנים במספרים בין סוגריים עגולים. רשום במחברת הבחינה את מספרי הביטויים החסרים (1) – (5) בלבד, בסדר עולה, וכתוב לצד כל מספר את הביטוי החסר שהוא מייצג.

האלגוריתם:

צעד 1: לכל קודקוד $v_i \in V$ בצע:

1.1 הפעל את האלגוריתם של ____(1)____ , החל מקדקוד v_i .

1.2 שמור את הערכים הסופיים שמתקבלים בצעד 1.1 במטריצה P ב ____(2)____

צעד 2: ____(3)____ $\leftarrow$ max

צעד 3: לכל קדקוד $v_i \in V$ בצע:

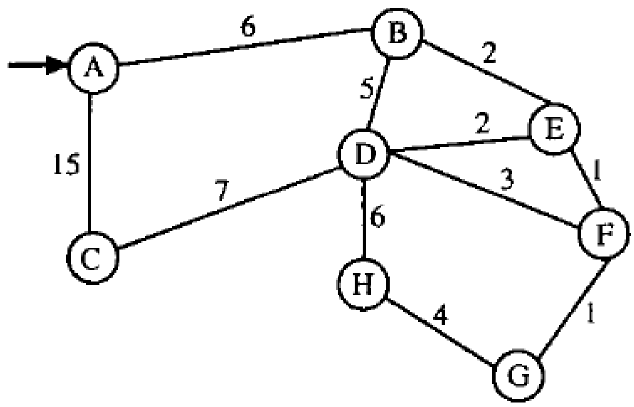
3.1 לכל קדקוד $v_j \in V$ בצע:

3.1.1 אם ____(4)____ אזי $\max \leftarrow P[v_i][v_j]$

צעד 4: החזר את ____(5)____

__שאלה 2 (ממבחן של משרד החינוך)__

לפניך גרף המתאר רשת תקשורת בעלת שבעה צומתי מיתוג:



א. מצא את המסלולים הקצרים ביותר, לפי אלגוריתם דייקסטרה, מן הצומת A לכל אחד מן הצמתים C , D , G , H , ורשום את מחירו של כל מסלול.

ב. משמיטים את הצומת H מן הרשת. ציין אילו מסלולים ישתנו כתוצאה מכך, וכיצד ישתנה כל אחד מהם.

<u>שאלה 3 (ממבחן של משרד החינוך)</u>

נתון גרף <u>לא מכוון</u>, קשיר ופשוט G = (V, E) ופונקצית משקל $w : E \rightarrow R^+$

כמו כן נתונים שני קדקודים מסוימים $s,t \in V$ וקשת מסוימת $e \in E$.

לפניך אלגוריתם המחזיר TRUE במידה וכל המסלולים הקצרים ביותר (במשקל) מקדקוד s לקדקוד t עוברים דרך הקשת e.

<u>אלגוריתם:</u>

1. נפעיל את אלגוריתם דייקסטרה על הגרף G
2. נסמן ב- M_1 את משקל המסלול הקצר ביותר מ- s ל- t
3. נבנה גרף חדש G1= (V1, E1) שבו ___(1)___
4. נפעיל את האלגוריתם ___(2)___ על הגרף G2
5. נסמן ב- M_2 את משקל המסלול הקצר ביותר מ- s ל- t ב- G1
6. אם ___(3)___ אזי החזר TRUE

   אחרת החזר FALSE

באלגוריתם הנ"ל חסרים <u>שלושה</u> ביטויים המסומנים במספרים בין סוגריים עגולים. התשובה הנכונה עבור כל אחד מהביטויים החסרים מופיעה בשאלות הבאות:

א. התשובה הנכונה עבור ביטוי (1) לעיל היא:

1). E1= E ו- V1 = קבוצת כל הקדקודים שב- V פרט לקדקודים הנוגעים בקשת e.

2). E1 = E – {e} ו- V1 = קבוצת כל הקדקודים שב- V פרט לקדקודים הנוגעים בקשת e.

3). E1 = E – {e} ו- V1 = V.

4). אף אחת מהתשובות הנתונות איננה נכונה.

ב. התשובה הנכונה עבור ביטוי (2) לעיל היא:

1). DFS על G1 מקדקוד s

2). דייקסטרה על G1

3). BFS על G1 מקדקוד s

4). אף אחת מהתשובות הנתונות איננה נכונה

ג. התשובה הנכונה עבור ביטוי (3) לעיל היא:

1). $M_2 > M_1$

2). $M_2 \geq M_1$

3). $M_2 = M_1$

4). $M_2 \leq M_1$

ד. סבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנתון הינה:

1) ליניארית כפונקציה של גודל הקלט.

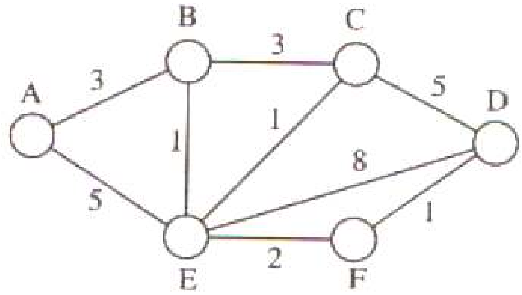
2) כסיבוכיות זמן הריצה של דייקסטרה.

3) לוגריתמית כפונקציה של גודל הקלט.

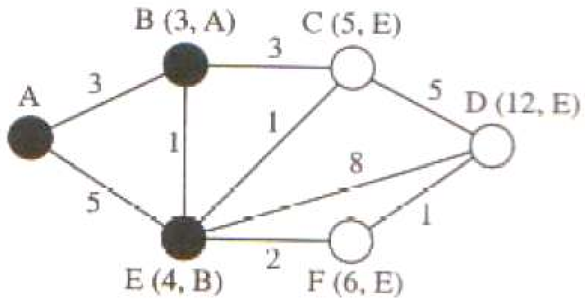
4) אף אחת מבין התשובות הנתונות איננה נכונה.

<u>שאלה 4 (ממבחן של משרד החינוך)</u>

לפניך תרשים של רשת תקשורת:



הוחלט לחפש את המסלול הקצר ביותר מן הצומת A לצומת D ברשת הנתונה, בעזרת **האלגוריתם של דייקסטרה**. לאחר שני הצעדים הראשונים, שבהם הצומת A ואחריו הצומת B היו הצמתים הפעילים, נקבע כי E יהיה הצומת הפעיל הבא. לאחר חישוב ערכי התוויות השכנות ל־E , התקבל התרשים הזה:



א.

כתוב או סרטט את השלבים הבאים בפתרון לפי **האלגוריתם של דייקסטרה**, עד סופו, וציין את הצמתים, החל מן הצומת A , לפי סדר המעבר בהם, ואת האורך הכולל של המסלול.

ב.

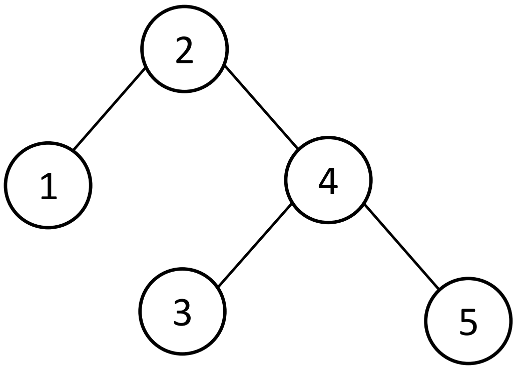
האם במהלך החיפוש של המסלול הקצר ביותר מן הצומת A לצומת D בעזרת **האלגוריתם של דייקסטרה** אפשר למצוא גם את המסלול הקצר ביותר מן הצומת A לכל אחד מן הצמתים ברשת? נמק את תשובתך.

<u>שאלה 5</u>

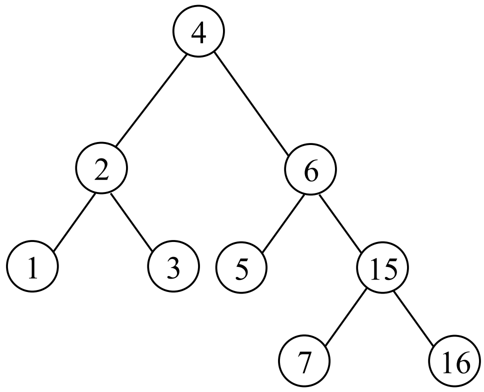
נתונים שלושה איברים בעלי המפתחות: 1, 2, 3. שרטטו את כל עצי החיפוש הבינאריים (לאו דווקא מאוזנים) המורכבים מאיברים אלו. עבור כל אחד מהעצים, תארו סדרה של פעולות הכנסה לעץ חיפוש בינארי היוצרת את העץ הנתון מעץ ריק.

<u>שאלה 6</u>

א. שרטטו כיצד יראה עץ AVL הבא, לאחר שיוסיפו לו צומת חדש שערכו 6:



ב. שרטטו כיצד יראה עץ AVL הבא, לאחר שיוסיפו לו צומת חדש שערכו 14:



<u>שאלה 7 (ממבחן של משרד החינוך)</u>

לפניך ארבע הגדרות i-iv:

i גרף מכוון בעל n קדקודים נקרא **שרוך מכוון** אם אין בו מעגל ואם דרגת הכניסה ודרגת היציאה של כל אחד מ- $n-2$ קדקודים היא 1 , יש בו קדקוד אחד שדרגת הכניסה שלו היא 0 ודרגת היציאה שלו היא 1 , וקדקוד אחד שדרגת הכניסה שלו היא 1 ודרגת היציאה שלו היא 0.

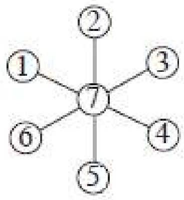
לפניך **שרוך מכוון**:

ii גרף לא מכוון נקרא **שרוך** אם הוא קשיר ודרגת כל קדקוד היא 2 , פרט לשני קדקודים שדרגתם היא 1 .

לפניך **שרוך**:

iii גרף לא מכוון בעל n קדקודים נקרא **גרף כוכב** אם הוא קשיר, הדרגה של אחד הקדקודים היא $n-1$, והדרגה של כל אחד מהקדקודים האחרים היא 1 . הקדקוד שדרגתו $n-1$ נקרא **קדקוד מרכזי**.

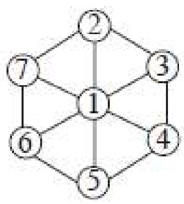
לפניך **גרף כוכב** בעל 7 קדקודים:



iv גרף לא מכוון בעל n קדקודים המסומנים $1, 2, ..., n$, $n \geq 4$, נקרא **גרף גלגל** אם הדרגה של הקדקוד המסומן 1 היא $n-1$, כלומר הוא מקושר לכל אחד מן הקדקודים האחרים. כל קדקוד i , $3 \leq i \leq n-1$ מקושר לקדקוד 1 , לקדקוד $i+1$ ולקדקוד $i-1$. כמו כן יש קשת בין הקדקודים 2 ו־ n .

הקדקוד שדרגתו $n-1$ נקרא **קדקוד מרכזי**.

לפניך **גרף גלגל** בעל 7 קדקודים:



לפניך ארבעה סעיפים א-ד שמתייחסים להגדרות i-iv שבעמוד הקודם. הסעיפים אינם תלויים זה בזה. ענה על כל הסעיפים.

א. הגרף שלפניך הוא **שרוך מכוון**.

(1) סרטט את ייצוגו של הגרף באמצעות רשימת סמיכויות.

(2) רשום את מטריצת הסמיכויות המייצגת את הגרף.

ב. לפניך אלגוריתם הבודק אם גרף קשיר הוא **גרף כוכב**. האלגוריתם פועל על גרף לא מכוון $G = (V, E)$ בעל n קדקודים המיוצג באמצעות מטריצת סמיכויות.

באלגוריתם חסרים שני ביטויים המסומנים (1) ו־ (2).

תיאור האלגוריתם:

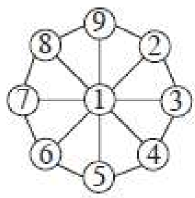
צעד 1: בדוק אם לכל קדקוד v בגרף, מספר ה־ 1־ים בשורה v במטריצת הסמיכויות הוא ___(1)___, פרט לקדקוד אחד u שמספר ה־ 1־ים בשורה u במטריצת הסמיכויות הוא ___(2)___.

צעד 2: אם כן — החזר "גרף כוכב", אחרת — החזר "לא גרף כוכב".

העתק למחברתך את הטבלה שלפניך, ורשום בה את הביטויים החסרים.

ביטוי **(1)**	
ביטוי **(2)**	

ג. לפניך **גרף גלגל** בעל 9 קודקודים:



(1) הפעל את האלגוריתם DFS על הגרף החל מהקדקוד המרכזי.
האם העץ הפורש DFS שיתקבל הוא שרוך?

(2) אם נתחיל את האלגוריתם DFS מקדקוד אחר של הגרף, שאינו הקדקוד המרכזי,
האם העץ הפורש DFS שיתקבל הוא שרוך? נמק את תשובתך.

ד. נתון גרף לא מכוון $G = (V, E)$ מלא (שלם) בן n קדקודים. $n > 3$.
רוצים לדעת אם קיימת הרצת DFS כך שהעץ הפורש DFS המתקבל ממנה הוא עץ שבו דרגת השורש (הקדקוד הראשון שנסרק) היא 2 בדיוק.
אם קיימת הרצה כזו — כתוב אותה. אחרת — הסבר מדוע אין הרצה כזו.

<u>שאלה 8 (ממבחן של משרד החינוך)</u>

נתון <u>עץ חיפוש</u> בינרי T המכיל **לפחות** 3 צמתים שערכיהם: x , y ו- z .

לפניך שלוש טענות:

א. אם x , y ו- z הם ערכי שלושה צמתים עוקבים בסריקה תוֹכית (inorder) של T , אז $z = x$.

ב. אם x ו- y הם שני עלים ב- T (משמאל לימין), אז $x > y$.

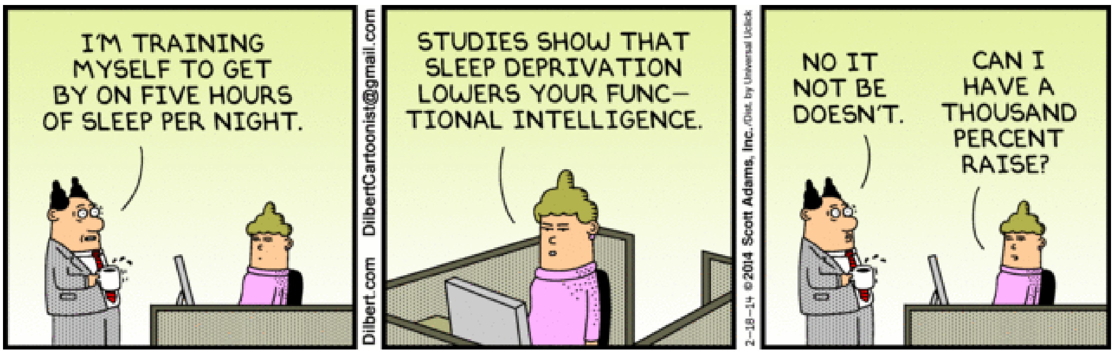
ג. אם x , y ו- z הם ערכי שלושה צמתים שונים, עוקבים בסריקה תוֹכית (inorder) של T , אז x , y ו- z הם ערכי צמתים עוקבים גם בסריקה תחילית (preorder) של T .

עבור <u>כל אחת</u> מהטענות א-ג בחר באפשרות המתאימה.

(i) הטענה נכונה בכל מקרה.

(ii) הטענה אינה נכונה בשום מקרה.

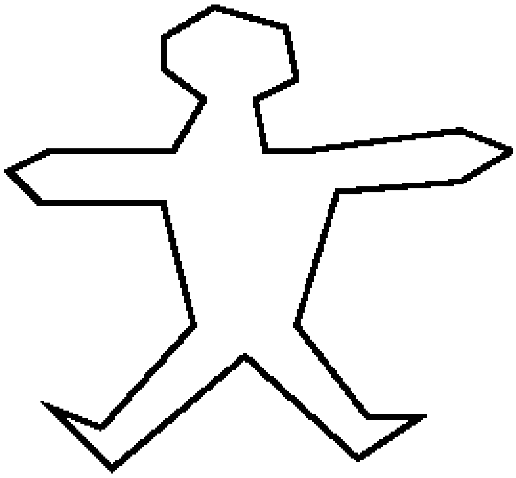
(iii) הטענה נכונה בחלק מהמקרים. תן דוגמה למקרה שבו הטענה נכונה ודוגמה למקרה שבו הטענה אינה נכונה.



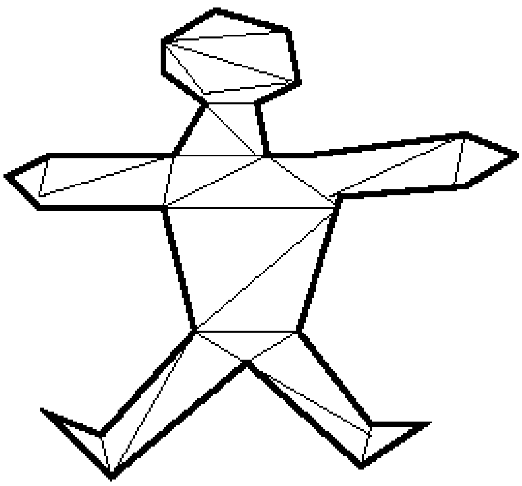
<u>שאלה 9</u>

אחת מהבעיות המעשיות המתעוררות ביישומים גראפיים שונים, היא בעיה אלגוריתמית שבה מקבלים כקלט מצולע (polygon) ועלינו לבצע עליו שילוש (triangulation), כלומר – למתוח אלכסונים במצולע (אלכסון הוא קו ישר המחבר שני קודקודים שאינם סמוכים), כך שכל הפנים של הצולע יחולק למשולשים. אסור לאלכסונים לחתוך זה את זה.

לדוגמא, בהינתן המצולע הבא:



הנה דוגמא לשילוש (טריאנגולציה) שלו:



המתמטיקאי הצרפתי ברנרד שאזל (Bernard Chazelle) הציע ב-1991 אלגוריתם רקורסיבי יעיל הפותר את בעיית שילוש המצולע, ואשר זמן הריצה שלו נתון על-ידי נוסחת הנסיגה:

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \sqrt{n}$. השתמשו באחד המשפטים שנלמדו בכיתה ופתרו את נוסחת הנסיגה.

הענף במדעי המחשב העוסק בפיתוח אלגוריתמים לפתרון בעיות גיאומטריות נקרא **גיאומטריה חישובית** – computational geometry. זהו תחום מחקר שיש לו שימושים רבים בגרפיקה ממוחשבת, ברובוטיקה ובמערכות ראייה ממוחשבת, וכו'. אלגוריתמים מתחום הגיאומטריה החישובית נמצאים בשימוש בהרבה מתוכנות השרטוט הממוחשבות (למשל - AutoCAD), במנועים גראפיים של משחקי מחשב, וכו'.