



מכללת אורט כפר-סבא

מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים

תרגיל מס' 18

פתרו את השאלות הבאות. יש לסיים את התרגיל עד יום ד' (11.2).

שאלה 1

א. שרטטו תרשימים המתארים את פעולת האלגוריתם MAX-HEAPIFY(A,2) עבור המערך

הבא: $A = (27, 17, 3, 16, 13, 10, 1, 5, 7, 12, 4, 8, 9, 0)$.

ב. מה התוצאה של הקריאה MAX-HEAPIFY(A,i) כאשר האיבר $A[i]$ גדול מבניו?

ג. מה התוצאה של הקריאה MAX-HEAPIFY(A,i) כאשר $i > A.heap-size / 2$?

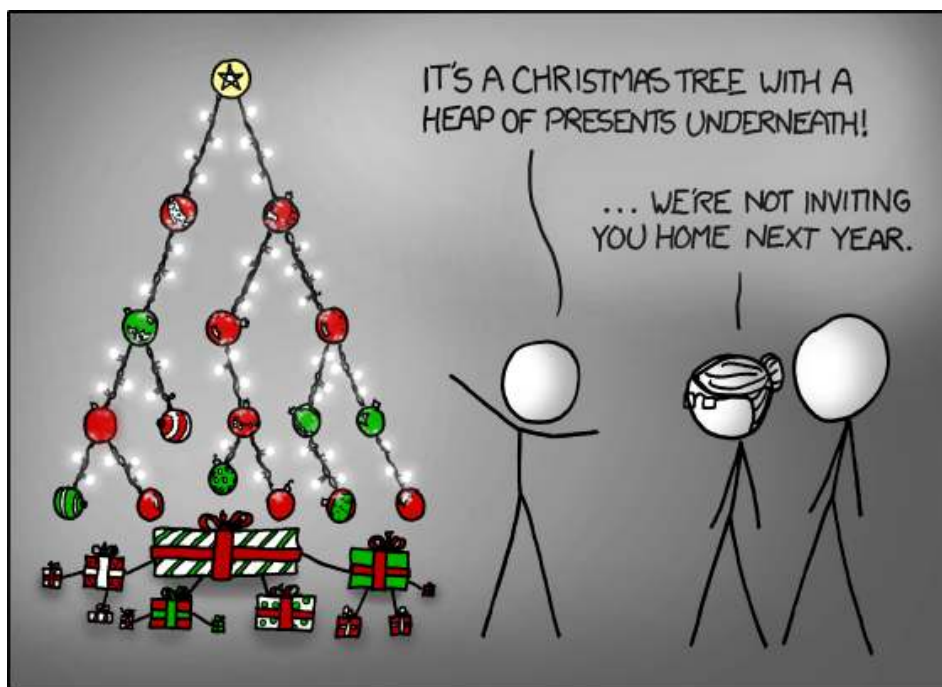
שאלה 2

א. שרטטו תרשימים המתארים את פעולת האלגוריתם BUILD-MAX-HEAP(A) עבור

המערך הבא: $A = (5, 3, 17, 10, 84, 19, 6, 22, 9)$.

ב. מדוע אנו רוצים שהאינדקס i בשורה 2 של BUILD-MAX-HEAP יקבל ערכים הולכים

וקטנים מ- $\lfloor \frac{A.length}{2} \rfloor - 1$ ועד 0, ולא ערכים הולכים וגדלים מ-0 ועד $\lfloor \frac{A.length}{2} \rfloor - 1$?



שאלה 3

האלגוריתמים שלמדנו בכיתה לטיפול בערימה בינארית, עסקו כולם בערימת מקסימום (Maximum Heap). כתבו אלגוריתמים לטיפול בערימת מינימום (Minimum Heap). האלגוריתמים שיש לכתוב הם MIN-HEAPIFY ו-BUILD-MIN-HEAP.

שאלה 4

א. האם סדרת המספרים (23, 17, 14, 6, 13, 10, 1, 5, 7, 12) היא ערימה? אם כן - שרטטו את העץ המתאים לה. אם לא - הסבירו מדוע אין מדובר בערימה.
ב. נתונה הערימה הבאה, המיוצגת כמערך:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
100	19	36	17	3	25	7	2	1

שרטטו את העץ הבינארי המתאים.

ג. בהנחה שכל האיברים בערימת מקסימום שונים זה מזה, האיבר הקטן ביותר יימצא...

1. בשורש העץ.

2. בצד השמאלי ביותר ברמה התחתונה של העץ.

3. בצד הימני ביותר ברמה התחתונה של העץ.

4. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

שאלה 5

א. שרטטו תרשימים המתארים את פעולת האלגוריתם HEAPSORT(A) עבור המערך הבא:

$$A = (5, 13, 2, 25, 7, 17, 20, 8, 4)$$

ב. כיצד מתנהג האלגוריתם למיון ערימה עבור מערך A שכבר ממורן בסדר עולה? ועבור

מערך A הממורן בסדר יורד?

שאלה 6

נתונה ערימת המקסימום הבאה: $A = (15, 13, 9, 12, 8, 7, 4, 0, 6, 2, 1)$.

א. שרטטו תרשימים המתארים את פעולת האלגוריתם MAX-HEAP-INSERT(A,10).

ב. שרטטו תרשימים המתארים את פעולת האלגוריתם HEAP-EXTRACT-MAX(A).

שאלה 7

שרטטו את העץ הבינארי בעל המספר הגדול ביותר של צמתים, שהוא בו-זמנית גם ערימת מקסימום וגם עץ חיפוש בינארי. השיבו על השאלה פעמיים: פעם אחת כאשר כל הערכים בעץ הם ייחודיים (אף ערך אינו חוזר על עצמו יותר מפעם אחת), ופעם אחת – כאשר מותר שאותו הערך יופיע בעץ מספר פעמים.

שאלה 8

האם קיים אלגוריתם המבוסס על השוואות, שזמן ריצתו לינארי, המקבל כקלט ערימה ובונה ממנה עץ חיפוש בינארי? נמקו את תשובתכם.

שאלה 9

- א. כתבו אלגוריתם המקבל כפרמטר מערך A של מספרים שלמים ואת אורכו n , ומחזיר 'אמת' אם המערך A מייצג ערימת מקסימום, ו-'שקר' אחרת. מהו זמן הריצה במקרה הגרוע ביותר $(W.C)$?
- ב. כתבו אלגוריתם המקבל כפרמטר עץ בינארי T , ומחזיר 'אמת' אם זהו עץ חיפוש בינארי, ו-'שקר' אחרת. מהו זמן הריצה במקרה הגרוע ביותר $(W.C)$?

שאלה 10

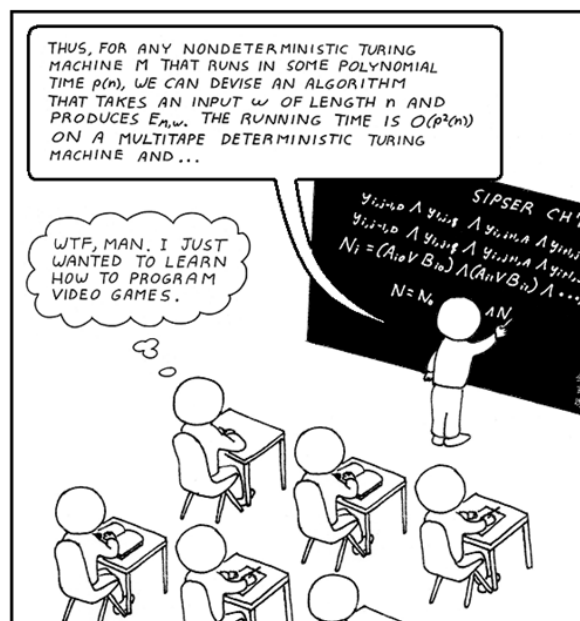
נתון מערך לא ממוין באורך n המכיל מספרים שלמים, לאו דווקא שונים זה מזה. איבר במערך נקרא **איבר חשוב** אם הוא מופיע במערך לפחות $n/4$ פעמים. פתחו אלגוריתם, שסיבוכיות זמן הריצה שלו היא לינארית, המחזיר 'אמת' אם קיים במערך איבר חשוב, ו-'שקר' אם לא. (הדרכה: היעזרו באלגוריתם Select אותו למדנו בכיתה)

שאלה 11

לפניכם טענה: "מיון ערימה (Heap Sort) זו גירסה של מיון בחירה (Selection Sort) העושה שימוש בטיפוס הנתונים המופשט 'ערימה' (Heap), על מנת לשפר את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם מ- $\Theta(n^2)$ ל- $\Theta(n \log n)$ ".
חוו דעתכם על טענה זו.

שאלה 12

פתרו את שאלה 2 מהבחינה החיצונית של אביב תשס"ז (2007).



שאלה 13 (ממבחן של משרד החינוך)

לפניך אלגוריתם **רקורסיבי** המקבל מטריצת סמיכות A בוליאנית המייצגת את הגרף G , שני קדקודים a ו- b , ומספר טבעי K . האלגוריתם צריך לבדוק אם בין שני הקדקודים b ו- a קיים מסלול בגרף G שמספר קשתותיו אינו עולה על K . n – מספר הקדקודים בגרף.

מסלול (A, a, b, K)

1. אם $a = b$ אז

החזר "אמת"

2. אחרת

2.1 אם $K = 0$ אז

(1)

2.2 אחרת

2.2.1 עבור i מ-1 ועד (2) בצע

אם $A[a][i]$, אז

(3)

באלגוריתם הזה חסרים **שלושה** ביטויים, המסומנים במספרים בין סוגריים עגולים. רשום במחברת הבחינה את מספרי הביטויים החסרים (1)-(3) **בלבד**, בסדר עולה, וכתוב לצד כל מספר את הביטוי החסר שהוא מייצג.

שאלה 14 (ממבחן של משרד החינוך)

יהי $G = (V, E)$ גרף **מכוון** המיוצג על ידי מטריצת הסמיכויות הבאה:

	a	b	c	d	e
a	0	0	0	0	1
b	0	0	0	1	0
c	0	0	0	1	0
d	1	0	1	0	0
e	0	1	0	0	0

כמה **רכיבי קשירות חזקה** – Strong Connected Component (רק"חים) יש בגרף

הנתון?

(1) 4

(2) 5

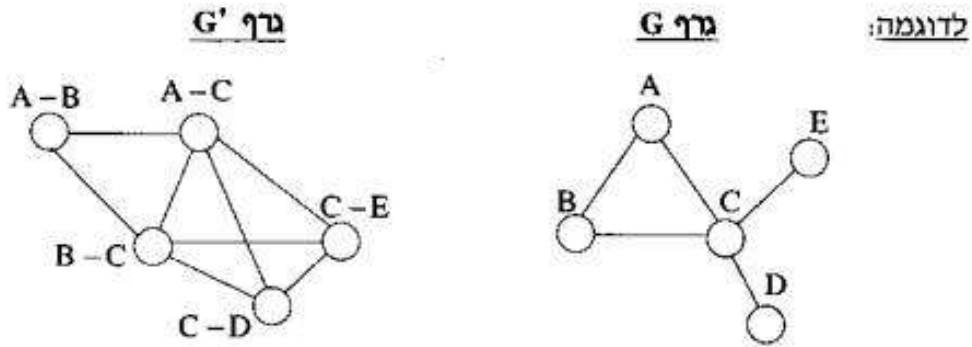
(3) 2

(4) 1

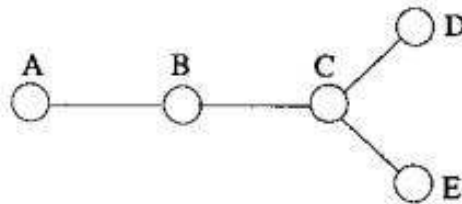
שאלה 15 (ממבחן של משרד החינוך)

נתון גרף G לא מכוון. נגדיר גרף "הפוך" לגרף G באופן הזה:

- i כל קשת בגרף G הופכת לצומת בגרף ה"הפוך" G' .
- ii בין שני צמתים בגרף ה"הפוך" G' תחבר קשת, אם שתי הקשתות ב- G שמהן נוצרו צמתים אלו יוצאות מאותו צומת ב- G .
- iii אם G גרף ריק, אזי הגרף ה"הפוך" G' הוא גרף ריק.



א. לפניך גרף G :



מצא את הגרף G' ה"הפוך" לו.

ב. לפניך 3 טענות (1)-(3). לכל אחת מהטענות, קבע אם היא נכונה או לא. תן דוגמה או נמק.

- (1) אם G גרף שלם (מלא), אזי הגרף ה"הפוך" G' הוא גרף שלם (מלא).
- (2) קיים גרף G כך שהגרף ה"הפוך" G' מכיל אך ורק צמתים.
- (3) תמיד הגרף ה"הפוך" ל- G' הוא G .



שאלה 16

נתון גרף $G = (V, E)$ לא מכוון, כאשר V היא קבוצת הצמתים ו- E היא קבוצת הקשתות. G ייקרא גרף דו-צדדי שלם (complete bipartite graph) אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

- ניתן לחלק את קבוצת הצמתים V לשתי קבוצות זרות, V_1 ו- V_2 , כך ש: $V = V_1 \cup V_2$ ו- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
- אין קשתות בין צומת אחד לצומת אחר ב- V_1 , ואין קשתות בין צומת אחד לצומת אחר ב- V_2 .
- מכל צומת ב- V_1 יש קשתות לכל אחד מהצמתים ב- V_2 , ומכל צומת ב- V_2 יש קשתות לכל אחד מהצמתים ב- V_1 .

גרף דו-צדדי שלם שעבורו ב- V_1 יש m צמתים וב- V_2 יש n צמתים מקובל לסמן ב- $K_{m,n}$.

- שרטטו גרף דו-צדדי שלם עבור קבוצות הקודקודים $V_1 = \{A, B, C\}$, $V_2 = \{D, E, F\}$.
- מהו מספר הקשתות ב- $K_{m,n}$? נמקו.
- נסחו תנאי בנוגע ל- m ול- n כך שיתקיים מסלול אוילר ב- $K_{m,n}$. נמקו.

שאלה 17 (מבחן של משרד החינוך)

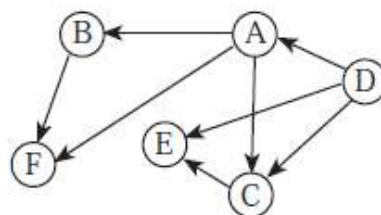
אפשר לייצג גרף G מכוון בעל N צמתים על ידי מטריצת סמיכויות. מטריצת הסמיכויות תיוצג על ידי מערך דו-ממדי M מטיפוס בוליאני בגודל $N \times N$, באופן זה:

אם יש בגרף G קשת מצומת I לצומת J , יהיה $M(I, J) = \text{true}$.

אם אין בגרף G קשת מצומת I לצומת J , יהיה $M(I, J) = \text{false}$.

דוגמה

לפניך הגרף G :



עבור הגרף G , מטריצת הסמיכויות M היא:

	A	B	C	D	E	F
A	false	true	true	false	false	true
B	false	false	false	false	false	true
C	false	false	false	false	true	false
D	true	false	true	false	true	false
E	false	false	false	false	false	false
F	false	false	false	false	false	false

לפניך אלגוריתם:

פעולה_על_גרף ($M, \text{LastNode}, \text{Letter}$)

```
{ הפעולה מקבלת מטריצת סמיכויות M, של גרף G מכוון ובלי מעגלים, ואותיות }
{ LastNode ו- Letter. }
{ צומתי הגרף מיוצגים על ידי האותיות "A" עד האות LastNode. הצומת Letter שייך לגרף. }
{ האלגוריתם נעזר בפעולה אות_עוקבת (L), המקבלת אות L ומחזירה את האות }
{ העוקבת ל-L על פי סדר ה- ABC. }
{ הנחה: LastNode < "Z". }
```

(1) $\text{Node1} \leftarrow "A"$

(2) **כל עוד** $\text{Node1} \leq \text{LastNode}$ **בצע**

(2.1) **אם** $(M(\text{Letter}, \text{Node1}))$ **אזי**

(2.1.1) $\text{Node2} \leftarrow "A"$

(2.1.2) **כל עוד** $\text{Node2} \leq \text{LastNode}$ **בצע**

(2.1.2.1) **אם** $(M(\text{Node1}, \text{Node2}))$ **אזי**

(2.1.2.1.1) $\text{Node3} \leftarrow "A"$

(2.1.2.1.2) **כל עוד** $\text{Node3} \leq \text{LastNode}$ **בצע**

(2.1.2.1.2.1) **אם** $(M(\text{Node2}, \text{Node3}))$ **אזי**

(2.1.2.1.2.1.1) **הדפס** $(\text{Letter}, \text{Node1}, \text{Node2}, \text{Node3})$

(2.1.2.1.2.2) **אות_עוקבת** $(\text{Node3}) \leftarrow \text{Node3}$

(2.1.2.2) **אות_עוקבת** $(\text{Node2}) \leftarrow \text{Node2}$

(2.2) **אות_עוקבת** $(\text{Node1}) \leftarrow \text{Node1}$

א. מה יהיה הפלט של האלגוריתם **פעולה_על_גרף** ($M, "F", "D"$) עבור הגרף G המתואר בדוגמה בתחילת השאלה?

ב. מה מבצע האלגוריתם **פעולה_על_גרף** ($M, \text{LastNode}, \text{Letter}$) עבור כל גרף מכוון בלי מעגלים G?

