חידה לחימום

שתי רשימות מקושרות L1, L2, חולקות ביניהן זנב משותף. תארו אלגוריתם המוצא את החוליה הראשונה המשותפת לשתי הרשימות.

חידה לחימום

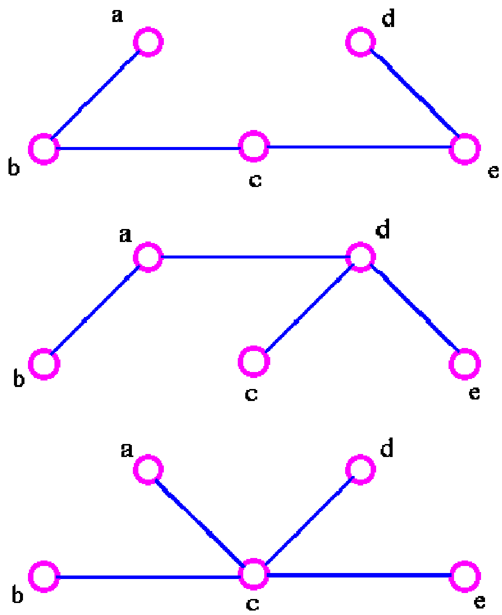
רשימה מקושרת עשויה להכיל לולאה. תארו אלגוריתם המקבל מצביע לראש הרשימה, ומחזיר ערך בוליאני "אמת" אם קיימת לולאה, ו-"שקר" – אם לא קיימת.

מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים

(11.1.2015)

עצים

הגדרה: גרף פשוט ובלתי-מכוון $G = (V,E)$ יקרא **עץ** (tree) אם הוא קשיר וחסר מעגלים.



הגדרה: גרף פשוט ובלתי-מכוון $G = (V,E)$ יקרא **יער** (forest) אם כל אחד מרכיבי הקשירות שלו הוא עץ.

משפט העץ: יהי $G = (V,E)$ גרף פשוט ובלתי-מכוון. הטענות הבאות שקולות:

1. G הוא עץ.
2. בין כל שני קודקודים ב- G קיים מסלול פשוט יחיד.
3. G קשיר, אולם אם נוציא קשת כלשהי מ-E, הגרף שיתקבל לא יהיה קשיר.
4. G קשיר, ומתקיים: $|E| = |V| - 1$
5. G אינו מכיל מעגלים, ומתקיים: $|E| = |V| - 1$
6. G אינו מכיל מעגלים, אולם אם נוסיף ל-E קשת כלשהי, הגרף שיתקבל יכיל מעגלים.

את טענה (3) מנסחים לפעמים באופן הבא: "G הוא גרף קשיר מינימלי".

את טענה (6) מנסחים לפעמים באופן הבא: "G הוא גרף חסר מעגלים מקסימלי".

שאלה:

מהמשפט, ברור כי התנאי $|E| = |V| - 1$ הוא **תנאי הכרחי** (necessary condition) לכך שגרף מסוים יהיה עץ. האם זהו גם **תנאי מספיק** (sufficient condition)? כלומר – האם בהינתן גרף פשוט ובלתי-מכוון $G = (V,E)$, קיומו של התנאי $|E| = |V| - 1$ מבטיח לנו שמדובר בעץ? אם לדעתכם התשובה חיובית – הוכיחו טענה זו; ואם לא – תנו דוגמא נגדית.

<u>הגדרה:</u> בהינתן גרף פשוט $G = (V,E)$ נגדיר **עץ פורש** (spanning tree) $T = (V,E')$ בתור עץ שקבוצת קודקודיו מורכבת מ-V (מקודקודי הגרף המקורי G), וקבוצת קשתותיו 'E היא תת-קבוצה של קבוצת הקשתות E בגרף המקורי G. כלומר: $E' \subseteq E$.

<u>שאלה:</u>

שרטטו גרף $G = (V,E)$ כך ששלושת הגרפים מהעמוד הקודם יהיו עצים פורשים שלו. האם קיימים בגרף ששרטטתם עצים פורשים נוספים, נוסף לשלושת העצים הללו?

<u>תכונות של עצים</u>

לפני שהתחלנו לדבר על תורת הגרפים, דנו בעצים בינאריים, פיתחנו אלגוריתמים שונים הפועלים עליהם, ודיברנו על תכונותיהם. נוכיח מספר תכונות נוספות, גם עבור עצים בינאריים וגם עבור עצים כלליים.

לצורך הדיון הבא, נשתמש בביטוי 'דרגה של צומת בעץ', כדי לתאר את מספר בניו של צומת. ברור שעבור עץ בינארי, מספר זה יכול להיות רק 0, 1 או 2. נשים לב, שהגדרה זו שונה מעט מאשר ההגדרה שהכרנו בתורת הגרפים, עבור הדרגה של קודקוד בגרף (הסבירו מהו ההבדל!).

<u>המשפט העיקרי על עצים בינאריים:</u> מספר העלים בעץ בינארי לא ריק גדול ב-1 ממספר הצמתים בעלי דרגה 2.

<u>הוכחה:</u>

נסמן ב-n את מס' הצמתים הכולל בעץ בינארי, נסמן ב-a את מס' הצמתים בעץ בעלי דרגה 1, נסמן ב-b את מס' הצמתים בעלי דרגה 2, ונסמן ב-c את מס' העלים (הצמתים בעלי דרגה 0). נסמן ב-e את מספר הקשתות בעץ.

ברור שמתקיים: $n = a + b + c$ (1)

שכן n מבטא את סך-כל הצמתים בעץ, וכל צומת בעץ בינארי חייב להשתייך לאחת מבין שלושת הקבוצות שהמספרים a,b,c מונים את גודלן.

עוד ידוע שמתקיים: $n = e + 1$ (2)

זהו אחד הסעיפים ממשפט העץ שראינו בהקשר של תורת הגרפים, אבל אפשר גם להצדיקו ישירות על סמך מבנהו של עץ בינארי לא ריק: כידוע, לכל צומת נכנסת קשת אחת בדיוק, פרט לשורשו של העץ.

נטען גם שמתקיים:

$$e = 2b + a \tag{3}$$

מצומת בעלת דרגה 2 יוצאות שתי קשתות. מאחר שיש b צמתים כאלה, מספר הקשתות הכולל היוצא מצמתים מסוג זה הוא 2b. מכל צומת שדרגתה 1 יוצאת קשת אחת, ויש a צמתים כאלה, המסתכמים יחד ל-a. מצומת שדרגתה 0 לא יוצאות קשתות. נחבר $2b + a + 0$, והתוצאה תשתווה ל-e.

כעת, נציב את משוואה (3) במשוואה (2), ונקבל:

$$n = 2b + a + 1 \tag{4}$$

נשווה בין משוואה (4) לבין משוואה (1), ונקבל:

$$a + b + c = 2b + a + 1 \tag{5}$$

נעביר אגפים במשוואה (5), ונקבל $c = b + 1$, כנדרש. כלומר – מספר העלים בעץ בינארי גדול ב-1 ממספר הצמתים בעלי דרגה 2.

מ.ש.ל

משפט: נתון עץ (לאו דווקא בינארי) המכיל n צמתים, אשר גובהו הוא h. ידוע כי הדרגה המקסימלית של כל צומת היא m, כאשר $m \geq 2$. מתקיים: $h \geq \log_m(n(m-1)+1)-1$.

הערה: מדוע דרשנו ש-$m \geq 2$? אם $m = 0$ אז העץ מכיל צומת בודד, שהוא עלה, ולכן $h = 0$. אם $m = 1$ אז מדובר ברשימה לינארית, וברור ש-$h = n-1$. לכן, אנחנו מבקשים ש-$m \geq 2$ כדי שהעץ לא יהיה טריוויאלי לגמרי, אלא יהיה עץ בינארי, טרינארי, וכו'.

הוכחת המשפט:

נסמן ב-n_i את מספר הצמתים ברמה i (כאשר $0 \le i \le h$). ברור שמתקיים:

$$n_0 = 1 = m^0$$

$$n_1 \le m = m^1$$

$$n_2 \le m^2$$

$$n_3 \le m^3$$

$$\vdots$$

$$n_h \le m^h$$

נסכם את כל h+1 האי-שיוויונות, ונקבל:

$$n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_h \le m^0 + m^1 + m^2 + m^3 + ... + m^h$$

נרשום את שני הסכומים בעזרת הסימן סיגמא:

$$\sum_{i=0}^{h} n_i \le \sum_{i=0}^{h} m^i$$

אגף שמאל שווה למספר הצמתים הכולל n:

$$n \le \sum_{i=0}^{h} m^i$$

אגף ימין הוא סכום של סדרה הנדסית, וידועה לנו הנוסחא: $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$. נציב בנוסחא m^0 במקום a_1 (האיבר הראשון), m במקום q (המנה הקבועה), ו-h+1 במקום n (כמות המספרים). נקבל:

$$n \le \frac{m^0 \cdot (m^{h+1} - 1)}{m - 1}$$

כלומר:

$$n \le \frac{m^{h+1} - 1}{m - 1}$$

נכפיל את שני האגפים ב-m-1 (זה לא הופך את כיוון האי-שוויון, כיוון ש-$m \ge 2$ ולכן m-1 הוא ביטוי חיובי) -

$$n \cdot (m-1) \le m^{h+1} - 1$$

נוסיף 1 לשני האגפים:

$$n \cdot (m-1) + 1 \le m^{h+1}$$

נוציא לוגריתם בבסיס m משני האגפים:

$$\log_m (n \cdot (m-1) + 1) \le \log_m (m^{h+1})$$

כלומר:

$$\log_m (n \cdot (m-1) + 1) \le h + 1$$

נחסיר 1 משני האגפים, וסיימנו:

$$\log_m (n \cdot (m-1) + 1) - 1 \le h$$

מ.ש.ל

__מסקנה:__ עבור עצים בינאריים מתקיים $m = 2$, ואז:

$$\begin{aligned} h &\ge \log_2 (n(2-1)+1) - 1 \\ &= \log_2 (n+1) - 1 \\ &= \log_2 (n+1) - \log_2 2 \\ &= \log_2 (\frac{n+1}{2}) \end{aligned}$$