חידה לחימום

נניח כי n הוא מסי טבעי אי-זוגי, וכי המערך a[1..n], שגודלו n איברים, מכיל תמורה (permutation) של המספרים 1…n.

מריצים את האלגוריתם הבא:

$x \leftarrow 1$

עבור i מ-1 עד n, בצע:

$x \leftarrow x * (a[i] - i)$

הצג כפלט את ערכו של x

הוכיחו כי פלט האלגוריתם יהיה תמיד **זוגי**.

<u>מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים</u>

(4.1.2015)

<u>תורת הקבוצות</u> (Set Theory)

אחד הענפים היסודיים במתמטיקה נקרא **תורת הקבוצות** (set theory). לענף זה ישנו שימושים רבים במדעי המחשב, ואנחנו נשתמש בכלים של תורת הקבוצות בהמשך לימוד הקורס.

<u>הגדרה:</u> לאוסף של איברים נקרא בשם 'קבוצה' (set). נסמן קבוצה על-ידי זוג סוגריים מסולסלים, אשר ביניהם מופיעה רשימת איברי הקבוצה, מופרדים בפסיקים.

למשל, נגדיר שתי קבוצות A ו-B:

$A = \{1, 4, 2, 9\}$

$B = \{3, -5, 4\}$

קבוצה A מכילה ארבעה איברים, ואילו קבוצה B מכילה שלושה איברים. נשים לב שאיבר יכול להופיע בקבוצה פעם אחת לכל היותר. על כן, אין לרשום איבר יותר מפעם אחת בתיאור קבוצה:

$\{19, 27, 19, 19, 35, 27\} = \{19, 27, 35\}$

כאשר נתונה לנו קבוצה, נרצה לדעת האם איבר מסוים משתייך לקבוצה, או לא. הסימן $\in$ מציין השתייכות של איבר לקבוצה. למשל, אם ניקח את שתי הקבוצות A ו-B שהגדרנו לעיל, אז מתקיים $1 \in A$ (קרי: 1 שייך ל-A, או: 1 הוא איבר של הקבוצה A). כמו כן, מתקיים:

$2 \in A$

$4 \in A$

$4 \in B$

באופן דומה, הסימן $\notin$ מציין שאיבר מסוים **אינו** משתייך לקבוצה. למשל:

$9 \notin B$

$0 \notin A$

נגדיר שלוש קבוצות בשם X, Y, Z:

$X = \{14, 24, 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94\}$

$Y = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 121, 132, 143\}$

$Z = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

אפשר היה לרשום בקיצור:

X = {כל המספרים הטבעיים הדו-ספרתיים שספרת האחדות שלהם היא 4}

Y = {כל המספרים החיוביים הקטנים מ-150 המתחלקים ב-11 ללא שארית}

Z = {כל המספרים הטבעיים שאינם עולים על 100 שהם ריבוע של מספר שלם}

לפניכם מספר טענות. קבעו לגבי כל אחת מהן האם היא נכונה או לא נכונה:

$35 \in X$	נכון / לא נכון
$35 \in Y$	נכון / לא נכון
$150 \notin Y$	נכון / לא נכון
$44 \in X$	נכון / לא נכון
$44 \notin Y$	נכון / לא נכון
$64 \in Z$	נכון / לא נכון
$64 \notin Y$	נכון / לא נכון
$4 \notin X$	נכון / לא נכון

אם כל איברי קבוצה מסוימת M שייכים גם לקבוצה N, אז אומרים שהקבוצה M מוכלת בקבוצה N, או שהקבוצה M היא תת-קבוצה (subset) של הקבוצה N. מסמנים זאת על-ידי הסימן $\subseteq$, באופן הבא: $M \subseteq N$.

אם M איננה תת-קבוצה של N, אז מסמנים $M \nsubseteq N$.

לדוגמא, הקבוצה $A = \{3,-6, 40\}$ היא תת-קבוצה של $B = \{1, 9, -6, 20, 3, 40, 50\}$. נסמן זאת $A \subseteq B$.
באופן דומה, מתקיים $\{100, 9\} \subseteq Z$.

לפניכם מספר טענות. קבעו לגבי כל אחת מהן האם היא נכונה או לא נכונה:

$\{24, 94\} \subseteq X$	נכון / לא נכון
$\{4, 16\} \subseteq Z$	נכון / לא נכון
$\{88, 99\} \subseteq X$	נכון / לא נכון
$Y \subseteq \{11, 44\}$	נכון / לא נכון
$Y \nsubseteq Z$	נכון / לא נכון
$\{77\} \nsubseteq Y$	נכון / לא נכון

הגדרה: אם A ו-B הן קבוצות, אז הקבוצה $A\cup B$ נקראת **האיחוד** (union) של A ו-B, והיא מורכבת מכל האיברים שנמצאים ב-A או ב-B (או בשניהם).

למשל, אם A ו-B הן הקבוצות הבאות:

$A = \{1, 4, 2, 9\}$ $\qquad\qquad$ $B = \{3, -5, 4\}$

אז קבוצת האיחוד היא:

$A\cup B = \{-5, 1, 2, 3, 4, 9\}$

כלומר, איחוד זו פעולה שפועלת בין שתי קבוצות, ומחזירה קבוצה המורכבת מכל האיברים שנמצאים ב-A או ב-B (כולל איברים שנמצאים בשתי הקבוצות, כמו האיבר 4 מהדוגמא הקודמת).

דוגמא נוספת: אם נגדיר את שלוש הקבוצות הבאות -

$X = \{14, 24, 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94\}$

$Y = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 121, 132, 143\}$

$Z = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

אז מתקיים -

$X\cup Y = \{11, 14, 22, 24, 33, 34, 44, 54, 55, 64, 66, 74, 77, 84, 88, 94, 99, 110, 121, 132, 143\}$

$X\cup Z = \{1, 4, 9, 14, 16, 24, 25, 34, 36, 44, 49, 54, 64, 74, 81, 84, 94, 100\}$

לפניכם מספר טענות. קבעו לגבי כל אחת מהן האם היא נכונה או לא נכונה, וצרפו נימוק קצר ומשכנע.

א. לכל זוג קבוצות A,B, מתקיים $A\cup B = B\cup A$.

ב. לכל זוג קבוצות A,B, מתקיים $A\cup B = A$.

ג. לכל קבוצה A, מתקיים $A\cup A = A$.

ד. אם $A \subseteq B$, אז מתקיים $A\cup B = B$.

ה. לכל זוג קבוצות A,B, מתקיים $A\cup B \subseteq A$.

ו. אם $a\in A$ ו- $A \nsubseteq B$, אז $a\notin A\cup B$.

<u>הגדרה:</u> אם A ו-B הן קבוצות, אז הקבוצה $A \cap B$ נקראת **החיתוך** (intersection) של A ו-B, והיא מורכבת מכל האיברים שנמצאים <u>גם</u> ב-A <u>וגם</u> ב-B.

למשל, אם A ו-B הן הקבוצות הבאות:

$A = \{1, 4, 2, 9\}$

$B = \{2, 3, -5, 4\}$

אז קבוצת החיתוך היא:

$A \cap B = \{2, 4\}$

כלומר, חיתוך זו פעולה שפועלת בין שתי קבוצות, ומחזירה קבוצה המורכבת מכל האיברים שנמצאים ב-A וגם ב-B (האיברים המשותפים לשתי הקבוצות).

דוגמא נוספת: אם נגדיר את שלוש הקבוצות הבאות -

$X = \{14, 24, 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94\}$

$Y = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 121, 132, 143\}$

$Z = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

אז מתקיים -

$X \cap Y = \{44\}$

$X \cap Z = \{64\}$

לא תמיד יש איברים משותפים לשתי הקבוצות. למשל -

$Y \cap Z = \{\}$

במקרה כזה, אומרים שהחיתוך בין שתי הקבוצות הוא ריק (empty), או שקבוצת החיתוך היא **הקבוצה הריקה** (empty set). הקבוצה הריקה היא קבוצה שאין בה איברים, ומסמנים אותה לרוב ב-{}, או בסימן $\varnothing$. נכתוב, למשל -

$Y \cap Z = \varnothing$

לפניכם מספר טענות. קבעו לגבי כל אחת מהן האם היא נכונה או לא נכונה, וצרפו נימוק קצר ומשכנע.

א. לכל זוג קבוצות A,B, מתקיים $A \cap B = B \cap A$.

ב. לכל זוג קבוצות A,B, מתקיים $A \cap B = A$.

ג. לכל קבוצה A, מתקיים $A = A \cap A$.

ד. אם $A \subseteq B$, אז מתקיים $B = A \cap B$.

ה. לכל זוג קבוצות A,B, מתקיים $A \subseteq A \cap B$.

ו. לכל קבוצה A, מתקיים $\varnothing = A \cap \varnothing$.

ז. לכל קבוצה A, מתקיים $\varnothing = A \cup \varnothing$.

ח. אם $a \in A$ ו- $A \not\subseteq B$, אז $a \notin A \cap B$.

נגדיר גודל של קבוצה (set size) בתור מספר איבריה. נסמן את גודל הקבוצה על-ידי רישום האות המציינת את הקבוצה בין שני קווים אנכיים (כמו סימן ערך מוחלט). לדוגמא:

$|A| = 4$

$|\{5,2,9\}| = 3$

$|\varnothing| = 0$

בכל אחד מהסעיפים א׳-ג׳ נתונה קבוצה A וקבוצה B. בכל סעיף, רשמו את הקבוצה $A \cup B$ ואת הקבוצה $A \cap B$, וקבעו מהו גודלה של כל אחת מארבעת הקבוצות.

לדוגמא, אם $A = \{3,5\}$ ו-$B=\{3,2,7,8\}$, אז:

$A \cup B = \{2,3,5,7,8\}$

$A \cap B = \{3\}$

$|A| = 2$

$|B| = 4$

$|A \cup B| = 5$

$|A \cap B| = 1$

א. $A = \{2,19,6,4\}$, $B = \{7, 10\}$

ב. $A = \{2,3\}$, $B = \{3,1\}$

ג. $A = \{6,7,1\}$, $B = \{1,2,5,6,7,9\}$

לפניכם טענה: עבור כל שתי קבוצות A ו-B, מתקיים תמיד $|A \cup B| = |A| + |B|$.

האם הטענה נכונה באופן כללי? אם כן – הסבירו מדוע. אם לא – הסבירו מדוע לא, וציינו באילו תנאים היא כן תהיה נכונה (כלומר: מה צריכות הקבוצות A ו-B לקיים על מנת שהטענה תתקיים עבורן).

אחת הפעולות המוגדרות בין שתי קבוצות היא פעולת **ההפרש** (difference) המסומנת על-ידי הסימן '-' (מינוס). אם A ו-B הן קבוצות, אז קבוצת ההפרש A-B מורכבת מכל האיברים ששייכים ל-A ואינם שייכים ל-B (כלומר, איבר x שייך לקבוצת ההפרש A-B אם ורק אם הוא מקיים $x \in A$ וגם $x \notin B$).

לדוגמא: אם $A = \{3,9,12,1\}$ ו-$B = \{1,3,5\}$, אזי מתקיים $A\text{-}B = \{9,12\}$. ומה לגבי B-A? קבוצה זו אמורה להכיל את כל האיברים ששייכים ל-B ואינם שייכים ל-A. לכן: $B\text{-}A = \{5\}$.

דוגמא נוספת: אם $C = \{-5,0,2,7\}$ ו-$D = \{0,7\}$, אזי מתקיים $C\text{-}D = \{-5,2\}$. ומה לגבי הקבוצה D-C? היא אמורה להכיל את כל האיברים ששייכים ל-D ואינם שייכים ל-C. אין איברים כאלה, ולכן $D\text{-}C = \emptyset$.

לעיתים מסמנים את פעולת ההפרש בין קבוצות על-ידי הסימן '\' (קו נטוי) במקום על-ידי '-'. למשל: A\B (במקום A-B). אנחנו נשתמש בסימן - , אך נדע שיש המשתמשים גם ב- \.

לפניכם מספר טענות, אשר חלקן נכונות וחלקן שקריות. קבעו לגבי כל טענה האם היא נכונה או לא. לגבי טענות נכונות – נמקו מדוע. לגבי טענות שקריות – הביאו דוגמא נגדית המפריכה אותן:

א. עבור כל שתי קבוצות A ו-B, מתקיים תמיד $A\text{-}B = B\text{-}A$.

ב. אם $A \subseteq B$ אז $A\text{-}B=\emptyset$.

ג. לכל קבוצה A, מתקיים תמיד $A\text{-}A=\emptyset$.

ד. אם $x \in A \cap B$, אזי בהכרח מתקיים $x \in A\text{-}B$ או $x \in B\text{-}A$, אך לא שניהם יחד.

ה. אם $A\text{-}B=A$, אזי $B=\emptyset$.

ו. אם $A\text{-}B=B$, אזי $A=B=\emptyset$.

ז. אם $A \subseteq B$, אזי $|A\text{-}B| = |A| - |B|$.

ח. אם $|A\text{-}B| = |A| - |B|$, אזי $A \subseteq B$.

מציאת איבר מיקום בזמן לינארי

נתונה קבוצה מסוימת S של n איברים (נניח, בלי הגבלת הכלליות, שהם שונים זה מזה). נגדיר את **האיבר המיקומי ה-i** בתור אותו איבר בקבוצה S שגדול בדיוק מ-i-1 איברים אחרים. למשל, עבור i = 1 מדובר באיבר של S שגדול מ-0 איברים אחרים (אינו גדול מאף איבר), קרי – באיבר המינימלי בקבוצה. ועבור i = n מדובר באיבר של S שגדול מ-n-1 איברים אחרים (מכל האיברים האחרים), קרי – באיבר המקסימלי בקבוצה.

עבור i = (n+1)/2 מדובר באיבר שגדול בדיוק מחצי מאיברי הקבוצה, וקטן בדיוק מחצי מאיברי הקבוצה. לאיבר כזה קוראים **חציון** (median) ומציאתו היא שימושית לצורך יישומים שונים בסטטיסטיקה.

ניתן לכתוב אלגוריתם לינארי שמקבל כקלט קבוצה S ומוצא את האיבר המיקומי ה-1 או האיבר המיקומי ה-n. הנה דוגמא לאלגוריתם המוצא את האיבר המיקומי ה-n (המקסימום בקבוצה S):

```
FIND-MAXIMUM(S)
    max = S[0]
    for i ← 1 to n-1
        do if S[i] > max then
                max = S[i]
    return max
```

קל מאוד לשנות אלגוריתם זה כך שימצא את האיברי המיקומי ה-1 (המינימום בקבוצה S). נסו זאת כתרגיל.

מה נעשה אם נתבקש למצוא את האיבר המיקומי ה-n-1 (המספר השני-הכי-גדול בקבוצה S)? גם בעיה זו ניתן לפתור בזמן לינארי:

```
FIND-SECOND-LARGEST(S)
    max = S[0]
    scnd_max = S[1]
    if scnd_max > max then
       SWAP(max,scnd_max)
    for i ← 2 to n-1
        do if S[i] > max then
                scnd_max = max
                max = S[i]
           else if S[i] > scnd_max then
                    scnd_max = S[i]
    return scnd_max
```

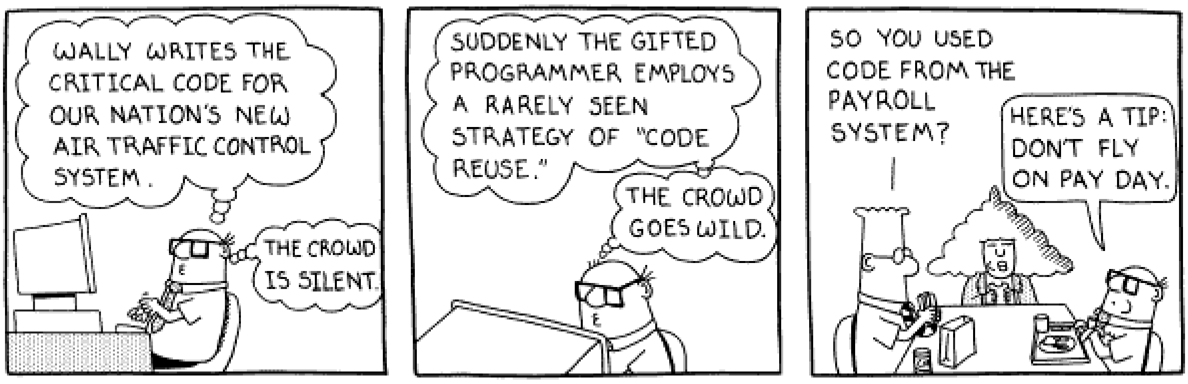
לא קשה לשנות אלגוריתם זה כך שימצא את האיברי המיקומי ה-2 (האיבר השני-הכי-קטן בקבוצה S). נסו זאת כתרגיל. אבל מה יקרה אם יבקשו מאיתנו למצוא את האיבר החמישי הכי גדול? או את האיבר השביעי הכי קטן? ברור שאפשר לכתוב אלגוריתם נפרד לכל אחת מבעיות אלו, אבל האם אפשר לכתוב אלגוריתם כללי שטוב עבור כל אחד מהמקרים?

הנה פתרון פשוט לבעיה: בהינתן קבוצה S בת n איברים ואינדקס i (המקיים $1 \le i \le n$) נוכל למיין את הקבוצה תוך שימוש באחד מאלגוריתמי המיון היעילים שלמדנו, לדוגמא – במיון-מיזוג (MERGE-SORT). אחרי שהקבוצה S ממוינת, אז האיבר המיקומי ה-i-י נמצא פשוט במקום i-1 (אנחנו מניחים כאן שמיספור האיברים בתוך S מתחיל מ-0, כמו במערכים בשפת C) ונוכל להחזיר אותו בצעד בודד.

```
SELECT(S,i)
1      MERGE-SORT(S,0,n-1)                // S ממיינים את
2      return S[i-1]
```

מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם? צעד מס' 1 מתבצע בזמן Θ(nlogn) וצעד מס' 2 מתבצע בזמן Θ(1), ולכן בסך-הכול סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם היא Θ(nlogn).

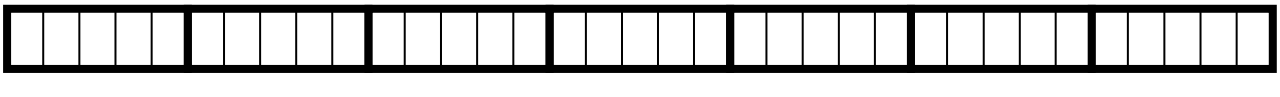
היתרון באלגוריתם זה הוא שהוא קצר מאוד, פשוט מאוד, ומתבסס על **שימוש-חוזר (reuse)** בקוד שכבר כתבנו בעבר (מיון-מיזוג). החיסרון הוא שניתן למצוא אלגוריתם יעיל יותר, שפותר את הבעיה בזמן לינארי.



* * *

האלגוריתם SELECT(S,i) שפותר את הבעיה בזמן לינארי מתבסס על הרעיון האלגוריתמי הבא:

1. נחלק את הקבוצה S בת n האיברים ל-n/5 מערכים בגודל 5 כל-אחד (עשויה להיות קבוצה אחת בת פחות מחמישה איברים, במידה והמספר n משאיר שארית בחלוקה ל-5). זו פעולה שאורכת זמן Θ(n).



2. נמצא את החציון (median) של כל אחת מ-n/5 החמישיות. מציאת כל חציון כזה אורכת זמן קבוע Θ(1) (כי יש רק חמישה איברים), ומכיוון שיש n/5 חמישיות כאלה אז הסיבוכיות הכוללת של צעד זה היא Θ(n). נשים את כל n/5 החציונים בקבוצה שתיקרא C.

3. כעת נמצא את החציון של קבוצת החציונים (median of medians) על-ידי זימון רקורסיבי מהצורה SELECT(C, (n/5 + 1)/2). נקרא לאיבר זה x.

4. נבצע חלוקה (Partition) של הקבוצה S לשני חלקים: אלו שקטנים-או-שווים ל-x ואילו שגדולים מ-x. זו פעולה שאורכת `Θ(n)`. לאחר ביצוע ה-Partition, יש בידינו שתי קבוצות: הקבוצה S_1 מורכבת מכל האיברים שקטנים-או-שווים ל-x, והקבוצה S_2 מורכבת מכל האיברים שגדולים מ-x. בעקבות ביצוע ה-Partition, ניתן להניח שאנחנו גם יודעים מה גודלה של כל קבוצה. נניח ש-$|S_1| = m$.

5. אם $i \leq m$, סימן שאיבר המיקום ה-i נמצא ב-S_1 ולכן נפעיל את הזימון הרקורסיבי `SELECT(S₁,i)`. אחרת, נסיק שאיבר המיקום ה-i נמצא ב-S_2 ולכן נפעיל את הזימון הרקורסיבי `SELECT(S₂,i-m)`.

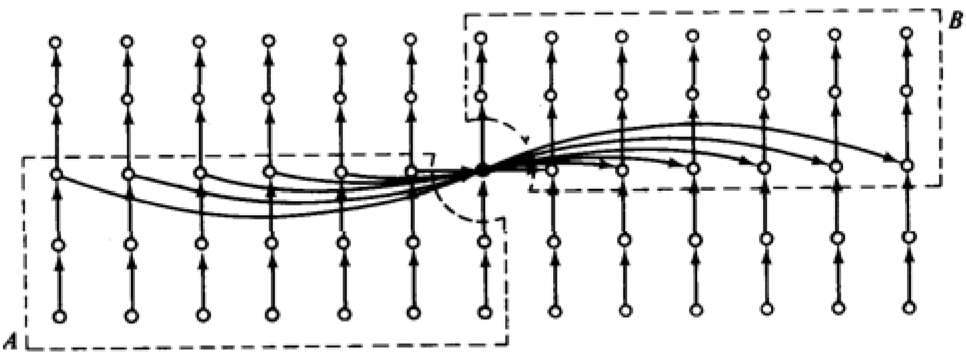
6. נחזיר את האיבר שמצאנו בצעד 5, ונסיים את האלגוריתם.

* * *

הבה ננתח את סיבוכיות זמן הריצה של אלגוריתם זה, ונוכיח שסדר הגודל שלו הוא לינארי.

צעדים 1, 2, 4 ו-6 מתבצעים בזמן `Θ(n)`, `Θ(n)`, `Θ(n)` ו- `Θ(1)` , בהתאמה. בצעדים 3 ו-5 מתבצעים זימונים רקורסיביים של `SELECT`. בצעד 3 מזמנים את הפונקציה על קבוצת החציונים C, ולכן פעולה זו אורכת $T(n/5)$.

בצעד 5 מזמנים את הפונקציה על S_1 או S_2. גודלה של כל אחת מקבוצות אלו יהיה לא יותר מ-$7n/10$. מדוע? על הקבוצה S ניתן להסתכל כך:



כל האיברים שבגוש A קטנים מ-x (החציון של החציונים), וכל האיברים שבגוש B גדולים מ-x. לגבי השאר – לא ניתן לדעת. מה גודלו של כל אחד משני הגושים A ו-B? בכל אחד מהם יש איברים מתוך $(n/5)/2 = n/10$ קבוצות בנות 5 איברים. מכל חמישייה כזו ניקח 3 איברים, ולכן בסה"כ נקבל כי בכל גוש יש $3n/10$ איברים.

מהו הגודל המקסימלי (במקרה הגרוע ביותר) של S_1 או S_2? הקבוצה S_1, למשל, תהיה לכל היותר מורכבת מכל איברי S שאינם בגוש B (קרי: מכל האיברים המופיעים באיור שלעיל בגוש A ומכל האיברים שאינם באף גוש). מכיוון שגודלו של גוש B הוא $3n/10$, נובע שגודלה של S_1 לא יעלה על $n-(3n/10) = 7n/10$ איברים. ניתוח דומה מסביר מדוע גודלה של הקבוצה S_2 לא יעלה אף הוא על $7n/10$. על כן, צעד 5 באלגוריתם מתבצע במקרה הגרוע ביותר בזמן $T(7n/10)$.

בסך-הכול קיבלנו את נוסחת הנסיגה הבאה:

```
T(n) = T(7n/10) + T(n/5) + Θ(n)
```

את נוסחת נסיגה זו לא ניתן לפתור לפי המשפטים שלמדנו בכיתה (משפט 1, משפט 2 או משפט האב). במקום זאת, ניתן להוכיח באינדוקציה שמדובר בנוסחה מסדר גודל $\Theta(n)$. **<u>אין חובה להכיר את ההוכחה!</u>**

<u>טענה א':</u> אם מתקיים $T(n)=T(\alpha n)+T(\beta n)+cn$ ו- $T(1)=c$ כאשר $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $\alpha+\beta<1$

אזי $T(n)\le\frac{c}{1-(\alpha+\beta)}n$.

<u>הוכחה:</u>

בסיס האינדוקציה - אם נציב n = 1 באי-השיוויון אז נקבל:

$$T(1)\le\frac{c}{1-(\alpha+\beta)}$$

$$c\le\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}\cdot c$$

אבל $\alpha+\beta<1$, ולכן המקדם של c באגף ימין גדול מ-1, ואי-השיוויון אכן מתקיים עבור n = 1.

הנחת האינדוקציה – נניח שהטענה נכונה עבור כל הערכים הקטנים מ-n.

מעבר האינדוקציה – נוכיח, בהסתמך על הנחת האינדוקציה, שהטענה נכונה עבור n:

$$T(n)=T(\alpha n)+T(\beta n)+cn \quad \le\frac{c}{1-(\alpha+\beta)}\alpha n+\frac{c}{1-(\alpha+\beta)}\beta n+cn$$

$$\le\frac{c\alpha n+c\beta n+(1-(\alpha+\beta))cn}{1-(\alpha+\beta)} \quad =\frac{c}{1-(\alpha+\beta)}n$$

מ.ש.ל

<u>טענה ב':</u> אם מתקיים $T(n)=T(\alpha n)+T(\beta n)+cn$ ו- $T(1)=c$ כאשר $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $\alpha+\beta<1$

אזי $T(n)=O(n)$.

<u>הוכחה:</u>

נובע בקלות מהטענה הקודמת, שכן אם $T(n)\le\frac{c}{1-(\alpha+\beta)}n$ אז בוודאי ש- $T(n)=O(n)$.

מ.ש.ל

משפט: סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם SELECT היא $\Theta(n)$.

הוכחה:

ראינו שנוסחת הנסיגה המתאימה לאלגוריתם היא:

$$T(n) = T(7n/10) + T(n/5) + \Theta(n)$$

אם נסמן $\alpha = \frac{7}{10}, \beta = \frac{1}{5}$ אז נראה שמתקיים $\alpha + \beta = \frac{7}{10} + \frac{1}{5} = \frac{9}{10} < 1$. מכאן שנוסחת הנסיגה מקיימת את כל תנאיי טענה ב', ולכן $T(n) = O(n)$. מאידך, ברור ש-$T(n) = \Omega(n)$ שכן חייבים לבחון כל איבר של הקבוצה לפחות פעם אחת. לפיכך - $T(n) = \Theta(n)$.

מ.ש.ל

שאלה (מבחינה חיצונית של אביב תשס"ו - 2006)

נתונה קבוצה s המכילה n מספרים חיוביים שונים זה מזה, וכן נתון מספר שלם חיובי K. אם קיים בקבוצה הנתונה s זוג מספרים שסכומם קטן מ-K, אז צריך להדפיס "**כן**". אחרת, צריך להדפיס "**לא**".

לפניך קטע קוד שפותר את הבעיה הזו.

```
m1 = Select (1,S);
m2 = ______(1)______ ;
if (______(2)______) printf ("כן");
          else        printf ("לא");
```

להזכירכם:

Select (K,S) היא פעולה אשר מוצאת ומחזירה את האיבר ה-K הקטן ביותר מבין איברי הקבוצה S, כלומר היא מוצאת את ערך המיקום ה-K בקבוצה S.
נתון כי סיבוכיות זמן הריצה של פעולה זו היא O (n), כאשר n מציין את מספר האיברים בקבוצה S.

בקטע הקוד הנתון חסרים שני ביטויים המסומנים בספרות בין סוגריים עגולים. התשובה הנכונה בעבור כל אחד מהביטויים החסרים מופיעה בשאלות שבסעיפים ט'–י'.

ט. מהי התשובה הנכונה בעבור הביטוי (1) המפורט בקטע הקוד:

1. Select (K,S)
2. Select (n,S)
3. Select (2 , S)
4. Select (n/2 , S)

י. מהי התשובה הנכונה בעבור הביטוי (2) המפורט בקטע הקוד:

1. $m2 - m1 < K$
2. $m1 + m2 < K$
3. $m2 - m1 \geq K$
4. $m1 + m2 \geq K$

שאלה (מבחינה חיצונית של אביב תשס"ד - 2004)

א. נתונות שתי קבוצות, S_1 ו־ S_2 , המקיימות:

I. S_1 ו־ S_2 זרות זו לזו.

II. כל קבוצה מכילה n מספרים שלמים חיוביים, כאשר n הוא כפולה שלמה של 3 .

III. כל מספר c השייך לקבוצה S_1 , קטן מכל מספר d השייך לקבוצה S_2 .

IV. בכל קבוצה כל המספרים שונים זה מזה.

נוסף על־כך נתון מספר שלם קבוע חיובי a .

לפניך אלגוריתם, בעל סיבוכיות זמן ריצה O(n) , הקובע אם קיימת קבוצה S_3 שהיא תת־קבוצה של S_1 (כלומר, S_3 מוכלת ב־S_1) , כאשר מתקיימים התנאים האלה:

I. $|S_3| \ge \frac{n}{3}$ (מספר המספרים שבקבוצה S_3 יהיה לפחות $\frac{n}{3}$).

II. לכל איבר x השייך לקבוצה S_2 ולכל איבר y השייך לקבוצה S_3 צריך להתקיים: $x - y \ge a$.

הנח שקיימת השגרה $partition(S, n, z, S_1, S_2)$, המבצעת חלוקה של הסדרה S בת n איברים לשתי סדרות, S_1 ו־ S_2 , שאינן ממוינות בהכרח. בסדרה האחת, S_1 , יהיו האיברים הקטנים מ־z או השווים ל־z . ובסדרה האחרת, S_2 , יהיו האיברים הגדולים מ־z .
סיבוכיות זמן הריצה של השגרה הזאת היא O(n) .

האלגוריתם:

צעד 1: `temp = select (_____(1)_____ , S1);`

צעד 2: `partition (S1 , n , temp , _____(2)_____ , S4);`

צעד 3: `max = select(` $\frac{n}{3}$ `, _____(3)_____);`

צעד 4: `min = _____(4)_____;`

צעד 5: `if ((min - max) ≥ a)` הדפס תשובה חיובית `;`

`else` הדפס תשובה שלילית `;`

באלגוריתם הנתון חסרים <u>ארבעה</u> ביטויים, המסומנים במספרים בין סוגריים עגולים.
רשום במחברת הבחינה את מספרי הביטויים החסרים (1)–(4) בלבד, בסדר עולה, וכתוב לצד כל מספר את הביטוי החסר שהוא מייצג.