



מכללת אורט כפר-סבא

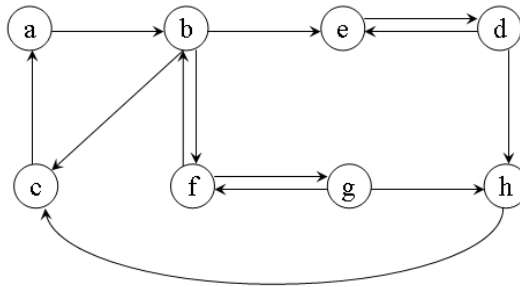
**מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים**

**תרגיל מס' 16**

פתרו את השאלות הבאות. יש לסיים את התרגיל עד יום ד' (28.1).

**שאלה 1**

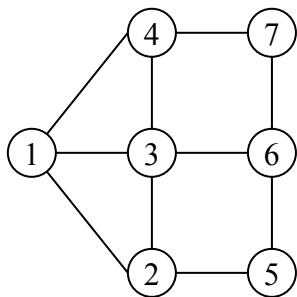
לפניכם גרף מכוון  $G$ :



- א. מצאו את רכיב/רכיבי הקשירות בחוזקה (רק"ח/רק"חיים) שבגרף הנתון. בעבור כל רק"ח יש לרשום את קבוצת הקודקודים שלו.
- ב. האם הגרף הנתון הוא גרף קשיר בחוזקה (קשיר היטב)? נמקו את תשובתכם.
- ג. האם גרף התשתית של הגרף  $G$  הוא גרף קשיר? נמקו את תשובתכם.

**שאלה 2 (מבחינה חיצונית אביב תש"ס – 2000)**

הגרף  $G$  מוגדר על-ידי  $G = (V, E)$ , כאשר  $V$  מבטא קבוצת צמתים בגרף ו- $E$  מבטא קבוצת קשתות בגרף.



הפעל את האלגוריתם BFS (חיפוש לרוחב) על הגרף הנתון וצייר את עץ הרוחב המתקבל מן האלגוריתם.

### שאלה 3

מעוניינים לכתוב אלגוריתם המקבל כקלט גרף פשוט ולא מכוון  $G$ , ומחזיר "אמת" אם הגרף קשיר ו-"שקר" אם הגרף לא קשיר. לפניך שלושה אלגוריתמים:

#### אלגוריתם א' (G)

- צעד 1:** הרץ את האלגוריתם BFS על הגרף  $G$ , עם קודקוד התחלתי כלשהו.  
**צעד 2:** אם לאחר ריצת האלגוריתם נותרו קודקודים שצבעם (color) לבן, אזי – החזר "שקר"; אחרת – החזר "אמת".

#### אלגוריתם ב' (G)

- צעד 1:** הרץ את האלגוריתם BFS על הגרף  $G$ , עם קודקוד התחלתי כלשהו.  
**צעד 2:** אם לאחר ריצת האלגוריתם נותרו קודקודים שמרחקם מהמקור (destination) שווה לאינסוף, אזי – החזר "שקר"; אחרת – החזר "אמת".

#### אלגוריתם ג' (G)

- צעד 1:** הרץ את האלגוריתם BFS על הגרף  $G$ , עם קודקוד התחלתי כלשהו.  
**צעד 2:** אם לאחר ריצת האלגוריתם נותרו קודקודים שאין להם קודם (שה-previous שלהם שווה ל-NULL), אזי – החזר "שקר"; אחרת – החזר "אמת".

קבעו לגבי כל אחד משלושת האלגוריתמים א' – ג' האם הוא פותר את הבעיה, ונמקו תשובתכם.

### שאלה 4

לפניך האלגוריתם הבא, המקבל כקלט גרף פשוט, קשיר היטב, **מכוון וממושקל**  $G = (V, E)$ , וכן זוג קודקודים  $s, t \in V$ . מטרת האלגוריתם היא להגיע מ- $s$  ל- $t$  דרך המסלול המכוון הקצר ביותר. נגדיר אורך של מסלול מכוון בתור סכום כל המשקלים של הקשתות המכוונות המרכיבות את המסלול.

**צעד 1:**  $v \leftarrow s$

**צעד 2:** כל עוד  $t \neq v$ , בצע:

2.1 אם  $t$  הוא אחד השכנים של  $v$ , אזי:

2.1.1  $v \leftarrow t$

2.2 אחרת:

2.2.1 בחר שכן  $u$  של  $v$ , כך שמשקל הקשת  $(v, u)$

הוא מינימלי.

2.2.2  $v \leftarrow u$

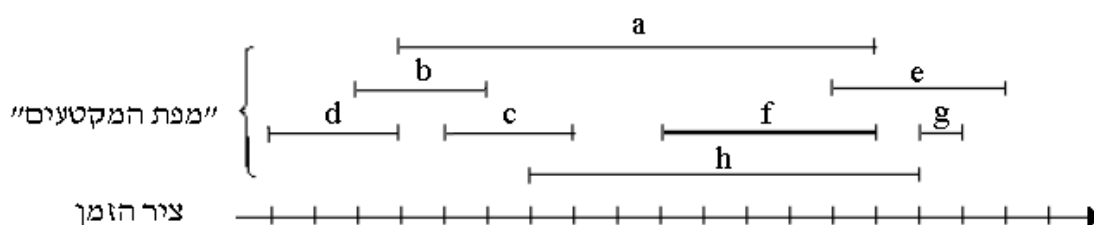
הקף בעיגול את התשובה הנכונה :

1. האלגוריתם משיג תמיד את מטרתו.
2. האלגוריתם משיג תמיד את מטרתו, בתנאי שאין שתי קשתות בעלות אותו המשקל היוצאות שתייהן מאותו הקודקוד.
3. לא משיג את מטרתו, אולם אם נמחק את שורות 2.1 ו-2.1.1, הוא יפעל כראוי.
4. לא משיג את מטרתו.

### שאלה 5

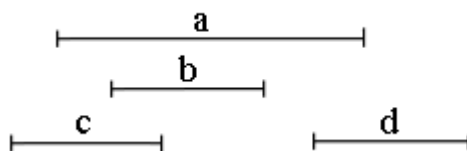
משחקי ספורט המתקיימים ביום מסוים מיוצגים על-ידי "מפת מקטעים" באופן הזה: כל משחק מיוצג על-ידי מקטע אחד שמציג את מועד תחילת המשחק ומועד סיומו. נגדיר מקטעים "חופפים חלקית" כאשר הם מייצגים משיקים שונים המתקיימים בזמן משותף (חלקי או מלא).

לפניכם דוגמא של "מפת מקטעים" המתארת זמנים של 8 משחקים:

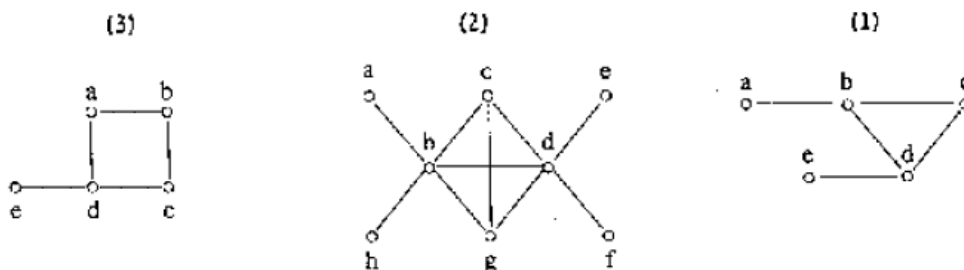


אפשר לייצג "מפת מקטעים" על-ידי גרף באופן הזה: כל מקטע מיוצג על-ידי צומת בגרף. בין שני צמתים תהיה קשת, אם שני המקטעים המתאימים "חופפים חלקית".

א. שרטטו את הגרף המייצג את "מפת המקטעים" הבאה:



ב. לפניך שלושה גרפים, הממוספרים (1) – (3):



- בדקו לכל אחד מהגרפים (1) – (3) האם אפשר לבנות "מפת מקטעים" שתתאים לו. במידה וכן – שרטטו אותה, במידה ולא – הסבירו מדוע לא ניתן.
- ג. האם אפשר לבנות "מפת מקטעים" לגרף לא קשיר? הסבירו.

## שאלה 6

נתון האלגוריתם הבא, הפועל על גרף  $G = (V, E)$  לא מכוון:

$$\text{count} \leftarrow 0 \quad (1)$$

$$\text{לכל קודקוד } v \in V, \text{ קרא:} \quad (2)$$

$$\text{אם } \text{count} \neq 0 \text{ הקודקוד } v \text{ הוא לבן, אז:} \quad (2.1)$$

$$\text{קרא } \text{BFS}(G, v) \quad (2.1.1)$$

$$\text{count} \leftarrow \text{count} + 1 \quad (2.1.2)$$

$$\text{החזר את } \text{count} \quad (3)$$

מה משמעות הערך שמחזיר האלגוריתם?

## שאלה 7

כזכור, גורם איזון (Balance Factor) של צומת בעץ בינארי מוגדר בתור ההפרש בין הגובה של תת-העץ השמאלי שלו, לבין הגובה של תת-העץ הימני שלו. נאמר על עץ בינארי שהוא מאוזן, אם גורם האיזון של כל אחד מצמתיו הוא 0, 1, או -1.

קבעו לגבי כל אחת מהטענות הבאות, האם היא נכונה או לא נכונה. במידה והיא נכונה – נמקו מדוע, ובמידה והיא אינה נכונה – הפריכו אותה על-ידי דוגמא נגדית:

א. כל עץ בינארי מלא (full) הוא מאוזן.

ב. כל עץ בינארי שלם (complete) הוא מאוזן.

ג. כל עץ בינארי כמעט שלם (almost complete) הוא מאוזן.

## שאלה 8

פתחו אלגוריתם שזמן ריצתו לינארי, המקבל כקלט מערך ממוין ובונה ממנו עץ AVL.

(הדרכה: היעזרו בתשובתכם לסעיף ג' של השאלה הקודמת)

## שאלה 9

פתחו אלגוריתם המקבל כקלט שני עצי AVL, ומחזיר עץ AVL המורכב מאיברי שני עצי הקלט.

א. פתרו את הבעיה בעזרת אלגוריתם שסיבוכיותו היא  $\Theta(n \log n)$ .

ב. פתרו את הבעיה בעזרת אלגוריתם שסיבוכיותו היא  $\Theta(n)$ .

(הדרכה: היעזרו בתשובתכם לשאלה הקודמת)

## שאלה 10

נתונה ההגדרה הבאה:

```
typedef struct {
    int code;           /* קוד עובד הוא מספר המזהה עובד בצורה חד-ערכית */
    char name[10];     /* שם עובד */
    char sex;          /* מין העובד: זכר ('M') או נקבה ('F') */
} worker;
```

כתבו תכנית הקולטת מהמשתמש מספר שלם וחיובי (טבעי)  $n$ , ולאחריו קולטת את פרטיהם של  $n$  עובדים. ידוע כי קוד עובד הוא מספר טבעי מהתחום 100..300.

התכנית תמייין את מערך העובדים באמצעות **מיון ספירה** (מיון מנייה – Counting Sort). לאחר מכן, היא תקלוט מהמשתמש קוד של עובד, ו**תחפש** אותו במערך העובדים הממוין באמצעות **חיפוש בינארי** (ממשו את האלגוריתם, או השתמשו בפונקציה bsearch המוגדרת ב-`stdlib.h`).

## שאלה 11

לעיתים משתמשים במניפולציה אלגברית הקרויה **החלפת משתנים** כדי להפוך נוסחת נסיגה בלתי ידועה לכזו שאנו כבר מכירים ויודעים כיצד לפתור. לדוגמא, נתבונן בנוסחת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$$

נוסחה זו נראית קשה לפתרון, אולם אפשר לפשט אותה על-ידי החלפת משתנים: נחליף את המשתנה  $n$  בביטוי  $2^m$  (הדבר שקול לסימון  $m = \log n$ ). נקבל:

$$T(2^m) = 2T(2^{\frac{m}{2}}) + m$$

כעת נסמן  $S(m) = T(2^m)$ , ונוסחת הנסיגה תקבל את הצורה:

$$S(m) = 2S\left(\frac{m}{2}\right) + m$$

אולם זו כבר נוסחת נסיגה שניתנת לפתרון על-ידי משפט האב (או על-ידי משפט 1), ופתרונה הוא  $S(m) = \Theta(m \log m)$  (בדקו שאכן זה כך!).

נחזור מ- $S(m)$  ל- $T(n)$  על-ידי הצבה:

$$T(n) = T(2^m) = S(m) = \Theta(m \log m) = \Theta(\log n \cdot \log \log n)$$

וקיבלנו, בסך הכול, כי הפתרון לנוסחת הנסיגה המקורית הוא  $T(n) = \Theta(\log n \cdot \log \log n)$ .

כעת, פתרו על-ידי החלפת משתנים את נוסחאות הנסיגה הבאות:

א.  $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$

ב.  $T(n) = T(\sqrt{n}) + \log n$

## שאלה 12

בכל אחד מהסעיפים נתונה טענה, המתייחסת לעצי חיפוש בינארי. עליכם לקבוע האם הטענה נכונה תמיד, או אולי הטענה אף פעם לא נכונה, או אולי הטענה לפעמים נכונה ולפעמים לא.

אם הטענה נכונה תמיד, או אם הטענה אף פעם לא נכונה – תנו נימוק משכנע מדוע זה כך. אם הטענה לפעמים נכונה ולפעמים לא נכונה – הדגמו עץ חיפוש בינארי אשר עבורו הטענה מתקיימת, והדגמו עץ חיפוש בינארי אחר אשר עבורו הטענה לא מתקיימת.

- א. המספר הקטן ביותר בעץ נמצא בעלה השמאלי ביותר.
- ב. אם הערך בשורש העץ גדול מ-x, אזי כל הערכים בתת-העץ השמאלי קטנים מ-x.
- ג. אם הערך בשורש העץ גדול מ-x, אזי כל הערכים בתת-העץ הימני גדולים מ-x.
- ד. אם שני צמתים A ו-B נמצאים באותה הרמה בעץ (A נמצא משמאל ל-B), אזי כל צאצא של B גדול מכל צאצא של A.
- ה. אם נסתכל על המספרים ברמה מסוימת בעץ משמאל לימין, אזי הם יהיו ממוינים בסדר עולה.
- ו. סכום ערכי תת-העץ השמאלי של השורש קטן מסכום ערכי תת-העץ הימני של השורש.
- ז. אם בשני עצי חיפוש בינארי אותו מספר צמתים, ושני העצים נבנו מאותם ערכים בדיוק, אך סדר הכנסת הערכים לעצים היה שונה, אזי סריקה בסדר סופי (המכונה לפעמים סריקה LRD – Left-Right-Data) של שני העצים תיתן סדרות פלט זהות.
- ח. אם בשני עצי חיפוש בינארי אותו מספר צמתים, ושני העצים נבנו מאותם ערכים בדיוק, אך סדר הכנסת הערכים לעצים היה שונה, אזי סריקה בסדר תוכי (המכונה לפעמים סריקה LDR – Left-Data-Right) של שני העצים תיתן סדרות פלט זהות.

