



מכללת אורט כפר-סבא

## מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים

### תרגיל מס' 15

פתרו את השאלות הבאות. יש לסיים את התרגיל עד יום א' (18.1).

#### שאלה 1

בשיעור למדנו על פעולות האיחוד ( $\cup$ ), החיתוך ( $\cap$ ) וההפרש ( $-$ ) בין קבוצות. לפניכם מספר טענות. הדגימו את נכונותן באמצעות דיאגרמות ון (Venn).

א.  $A \cup (A \cap B) = A$

ב.  $A \cap (A \cup B) = A$

ג.  $A \cap (B - A) = \emptyset$

ד.  $A \cup (B - A) = A \cup B$

ה.  $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

#### שאלה 2

קבעו לגבי כל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה או שקרית. אם לדעתכם טענה היא נכונה – הוכיחו את נכונותה על-ידי נימוק משכנע, ואם היא שקרית – הפריכו אותה על-ידי דוגמה נגדית.

א.  $(A \cup B) - B = A$

ב.  $(A \cup B) - B = A - B$

ג.  $(A \cup B) - B = (A - B) \cup B$

#### שאלה 3

נתבונן בשוויון  $(A \cup B) \cap C = A \cap (B \cup C)$ . לפניכם ארבע טענות, שלוש מתוכן שקריות, ורק אחת מביניהן נכונה. בחרו את הנכונה מביניהן, ונמקו את תשובתכם:

א. שוויון זה הוא זהות (נכון תמיד).

ב. לא קיימות קבוצות  $A, B, C$  המקיימות שוויון זה.

ג. אם השוויון מתקיים, אז  $A = B = C$ .

ד. יש קבוצות  $A, B, C$  השונות זו מזו ומקיימות את השוויון, ויש קבוצות שאינן מקיימות.

#### שאלה 4

נכיר פעולה חדשה על קבוצות הנקראת **הפרש סימטרי** (symmetric difference), שתסומן  $\Delta$ , המוגדרת באופן הבא:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

כלומר: ההפרש הסימטרי בין  $A$  ל- $B$  זו קבוצה המורכבת מכל איברי  $A$  שאינם ב- $B$ , ומכל איברי  $B$  שאינם ב- $A$ . לפניכם מספר טענות אודות פעולת ההפרש הסימטרי. קבעו לגבי כל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה או שקרית. אם לדעתכם טענה היא נכונה – הוכיחו את נכונותה על-ידי נימוק משכנע. אם לדעתכם טענה היא שקרית – הפריכו אותה על-ידי דוגמה נגדית.

1.  $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

2.  $A \Delta \emptyset = A$

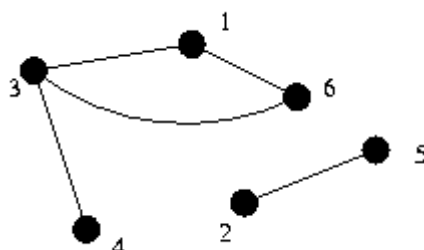
3.  $A \Delta A = A$

4.  $A \Delta (B - A) = A \cap B$

5.  $A \Delta (B \Delta A) = B$

#### שאלה 5

לפניכם הגרף  $G = (V, E)$  הבא:



מהשרטוט רואים כי קבוצת הקודקודים (הצמתים) שלו היא  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , וקבוצת הקשתות (הצלעות) שלו היא  $E = \{(2, 5), (3, 4), (3, 6), (3, 1), (6, 1)\}$ . קבעו לגבי הגרף  $G$  הנתון...

א. האם הגרף מכוון?

ב. האם הגרף פשוט? הסבירו איזה שינוי ניתן לעשות בגרף על מנת שתשובתכם תשתנה.

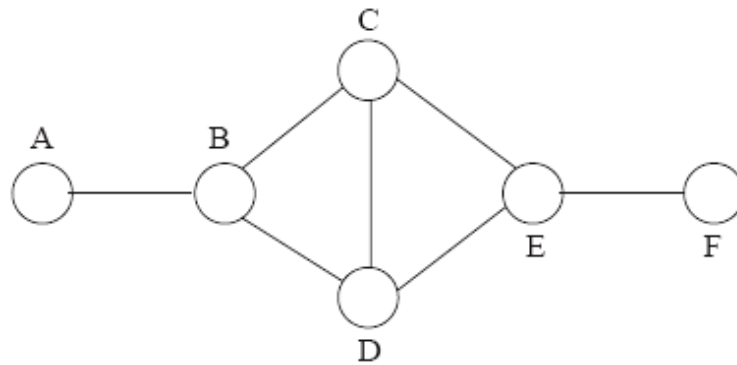
ג. האם הגרף קשיר? אם לא, אז תארו מהם רכיבי הקשירות שלו והסבירו איזה שינוי ניתן לעשות בגרף על מנת שתשובתכם לסעיף זה תשתנה.

#### שאלה 6

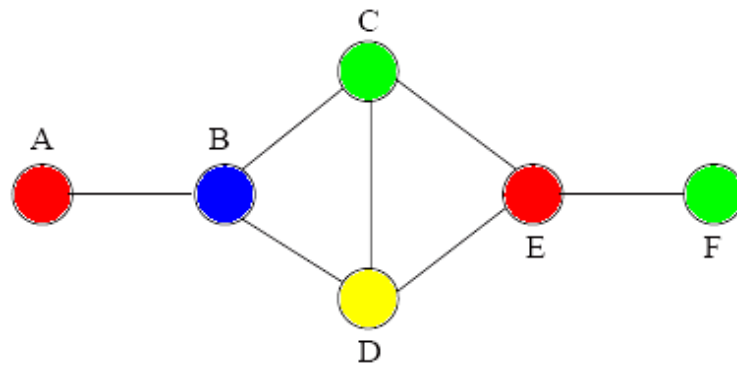
בהינתן גרף פשוט בן 100 קודקודים שכל הדרגות בו הן 50 לפחות, הוכיחו כי הגרף קשיר, וכי יש בו מעגל פשוט באורך 4.

## שאלה 7

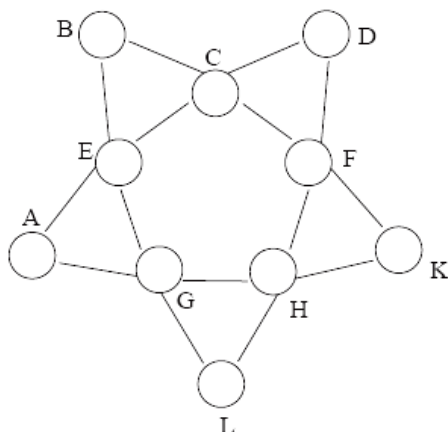
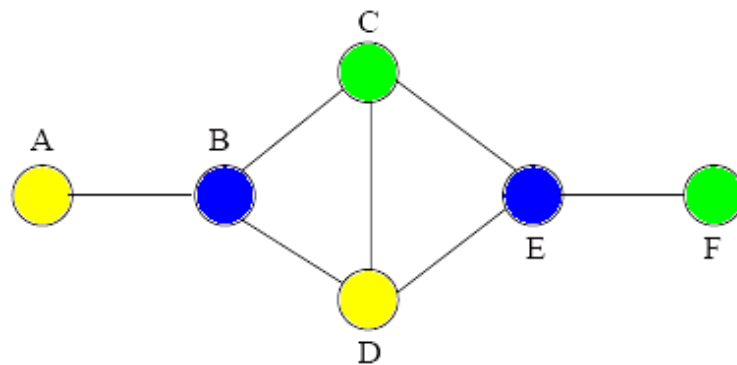
נגדיר את הפעולה "צביעה" של גרף כקביעת צבע לכל צומת בגרף, כך שלכל שני צמתים המחוברים בקשת נקבעים צבעים שונים. לדוגמא, נתון הגרף G:



אפשר לבצע "צביעה" של הגרף ב-4 צבעים:



אפשר גם לבצע "צביעה" של הגרף ב-3 צבעים בלבד:



- א. האם זו הדרך היחידה לבצע "צביעה" של הגרף ב-3 צבעים? נמקו תשובתכם.
- ב. האם ניתן לבצע "צביעה" של הגרף G ב-2 צבעים בלבד? נמקו תשובתכם.
- ג. בצעו "צביעה" של הגרף הבא. השתמשו ב-3 צבעים בלבד.
- ד. מהו המספר הקטן ביותר של צבעים שבהם אפשר לבצע "צביעה" של גרף שלם ובו  $m$  צמתים? נמקו.

### שאלה 8

נגדיר סדרה של גרפים לא מכוונים באופן הזה: בגרף  $G_0$  יש צומת אחד, המסומן ב- $V_0$ , ואין בו קשתות. כל גרף  $G_n$  יוגדר באמצעות הגרף  $G_{n-1}$  באופן הבא:

- נוסיף לגרף  $G_{n-1}$  צומת  $V_n$ .

- אם  $n$  זוגי, נוסיף לגרף  $G_{n-1}$  קשתות שיחברו את הצומת  $V_n$  אל כל הצמתים שהאינדקס שלהם אי-זוגי.

- אם  $n$  אי-זוגי, נוסיף לגרף  $G_{n-1}$  קשתות שיחברו את הצומת  $V_n$  אל כל הצמתים שהאינדקס שלהם זוגי.

א. שרטטו את הגרפים:  $G_0, G_1, G_2, G_3, G_4$ . שימו לב: 0 הוא מספר זוגי.

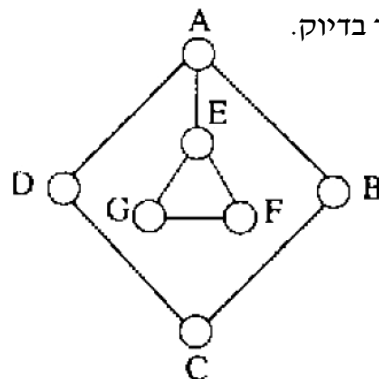
ב. מה תהיה דרגת הצומת  $V_n$  בגרף  $G_n$ ?

ג. מה תהיה דרגת הצומת  $V_n$  בגרף  $G_{n+1}$ ?

ד. לפניכם טענה: לכל הצמתים בגרף  $G_n$  יש אותה דרגה  $x$  שקיימים שני מספרים שלמים וחיוביים (טבעיים),  $x$  ו- $y$ , כך שלחלק מהצמתים בגרף  $G_n$  יש דרגה  $x$  ולשאר הצמתים בגרף  $G_n$  יש דרגה  $y$ . קבעו האם הטענה נכונה או אינה נכונה, ונמקו את קביעתכם.

### שאלה 9

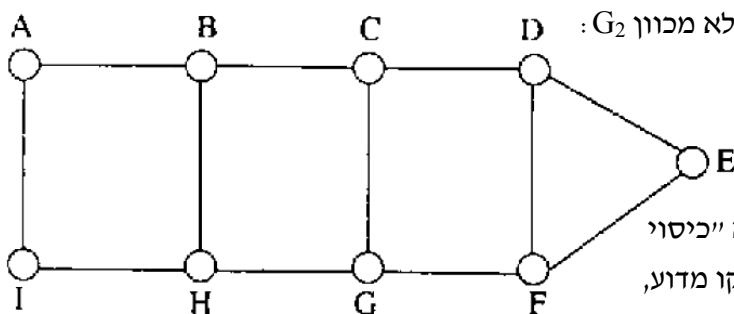
יהיה גרף  $G$ , קשיר, לא מכוון, בלי קשתות מרובות (אין יותר מקשת אחת בין שני קודקודים) ובלי לולאות עצמיות. נגדיר "כיסוי מעגלים" של גרף  $G$  בתור אוסף של מעגלים פשוטים ב- $G$ , כך שכל קודקוד בגרף  $G$  נמצא במעגל פשוט אחד בדיוק.



לדוגמא, נתון הגרף  $G_1$  הבא:

"כיסוי מעגלים" של הגרף  $G_1$  הוא אוסף המעגלים הפשוטים  $\{EFGE, ABCDA\}$ .

א. לפניכם הגרף הפשוט, הקשיר והלא מכוון  $G_2$ :



(i) רשמו "כיסוי מעגלים"

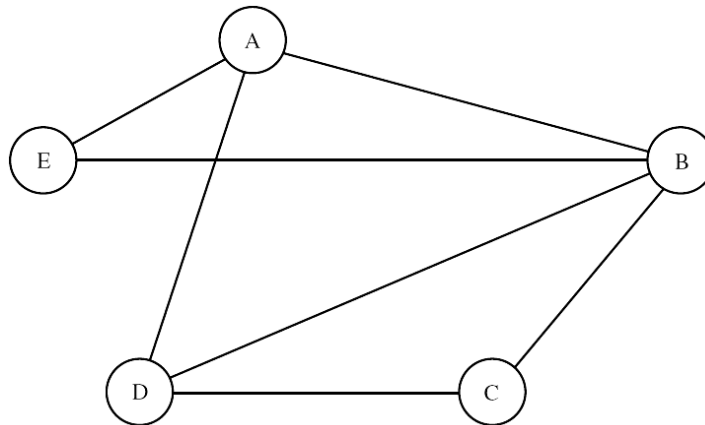
של הגרף  $G_2$ .

(ii) האם הכיסוי שרשמתם הוא "כיסוי מעגלים" יחיד? אם כן – נמקו מדוע, אם לא – רשמו "כיסוי מעגלים" נוסף.

ב. תנו דוגמא לגרף קשיר, לא מכוון, בלי קשתות מרובות ובלי לולאות עצמיות, שבו הדרגה של כל אחד מהקודקודים היא לפחות 2 ואין לו "כיסוי מעגלים".

**שאלה 10**

נייצג מסלול בגרף ע"י רשימה L המייצגת את צלעות המסלול לפי סדר. לדוגמה, לגבי הגרף הזה:



נייצג את המסלול  $L = (A, B, D, C)$  – הרשימה L כוללת ארבעה קודקודים ומייצגת שלוש צלעות (לפי סדר המסלול).  
 – המתחיל בקודקוד A והעובר דרך B, D ו-C, על-ידי

נתון אלגוריתם שבעזרתו אפשר למצוא מסלול מעגלי, בעל משקל מינימלי, העובר פעם אחת בלבד בכל אחד מהקודקודים בגרף שלם (גרף שכל הקודקודים בו מחוברים זה לזה). נסמן ב-L את סדרת הקודקודים המייצגת את המסלול שנבנה. בתחילה L הוא סדרה (רשימה) ריקה. נסמן ב-U את הקודקוד האחרון במסלול שנבנה.

צעד 1. **בחר בקודקוד כלשהו, שהמצלף יתחיל בו, והצב אותו ב-W.**

צעד 2. **הצב את W ב-U וצרף את W ל-L.**

צעד 3. **כל עוד L אינה כוללת את כל הקודקודים בצרף, הצב:**

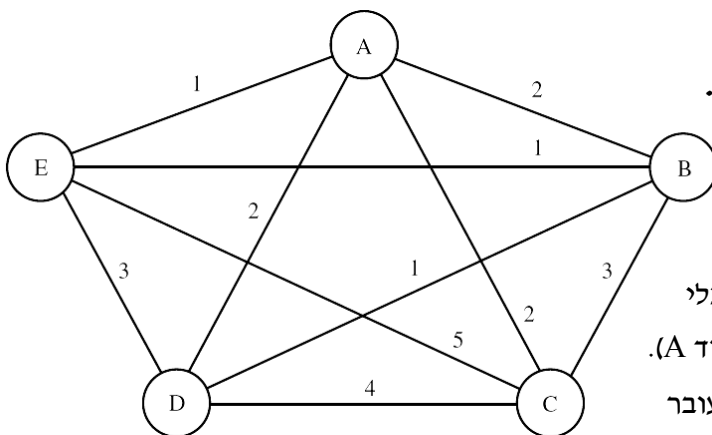
3.1. **בחר בצלף  $(U, V)$ , בעלת משקל מינימלי, מהין הצלפות**

**היוצאות מ-U, כך שהקודקוד V אינו מופיע ברשימה L.**

3.2. **הוסף את הקודקוד V שבחרת ל-L.**

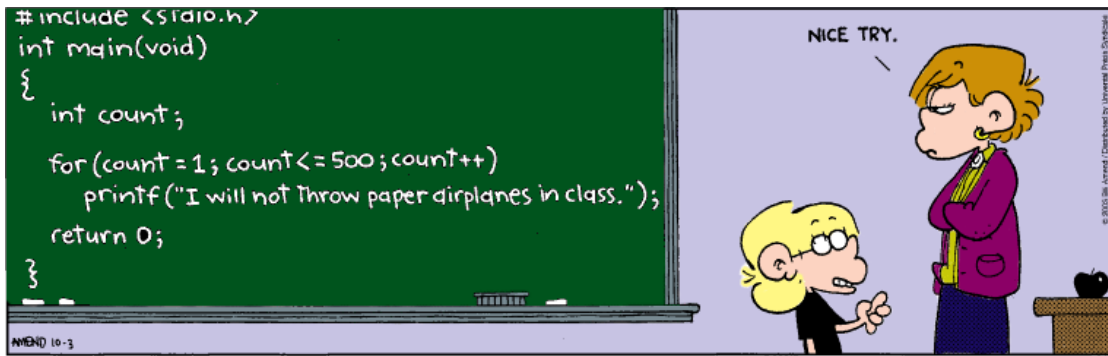
3.3. **הצב את V ב-U.**

צעד 4. **הוסף ל-L את הקודקוד W.**



- א. נתון הגרף השלם הבא. הפעילו את האלגוריתם על הגרף השלם הנתון, ורשמו את המסלול המעגלי שיתקבל (התחילו את הסריקה מקודקוד A).  
 ב. האם האלגוריתם תמיד מאתר מעגל העובר פעם אחת בלבד בכל קודקוד?

האם האלגוריתם תמיד מאתר מעגל בעל משקל מינימלי?



### שאלה 11

נתונה נוסחת הנסיגה הבאה, המבטאת זמן ריצה של אלגוריתם רקורסיבי:

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + f(n), \text{ כאשר } T(1) = \Theta(1)$$

בכל אחד מהסעיפים א' - ג' מצאו פונקציית זמן ריצה  $f(n)$  מתאימה, כך שסדר הגודל של סיבוכיות זמן הריצה  $T(n)$  של האלגוריתם, יהיה שווה לביטוי הרשום בסעיף.

- א.  $\Theta(n^2)$       ב.  $\Theta(n^2 \log n)$       ג.  $\Theta(n^3)$

### שאלה 12

א. פתרו את שאלה 3 (למעט סעיף ה') מהבחינה החיצונית של אביב תשס"ג (2003).

ב. פתרו את שאלה 2 מהבחינה החיצונית של אביב תשס"ג (2003).

